t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخنامه

کنکور

به سبک ماز

۱۴۰۲ داخل

پاسخنامه کاملاً تشریحی
بررسی دقیق تمام گزینه‌ها
نکات مشاوره‌ای و دام‌های تستی
جداول و نکات مناسب دوره جمع‌بندی

گروه آموزشی ماز

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۲ ۱

نکته ۱:

جملهٔ n ام یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

نکته ۲:

b را واسطهٔ حسابی a و c گوییم، هرگاه: $b = \frac{a+c}{2}$.

نکته ۳:

جملهٔ n ام دنبالهٔ هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جملهٔ اول و r قدرنسبت می‌باشد. $(t, r \neq 0)$

نکته ۴:

b را واسطهٔ هندسی a و c گوییم، هرگاه: $b^2 = ac$.

پاسخ تشریحی:

جملات دنباله هندسی با قدرنسبت r: $a, ar, ar^2, \ldots$

اگر جملات دنباله هندسی نصف شوند، یک دنباله حسابی با قدرنسبت d خواهیم داشت:

جملات دنباله حسابی با قدرنسبت d: $\frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}, \ldots$

می‌دانیم در یک دنباله حسابی با جملات متوالی a ، b و c، داریم: $2b = a + c$، پس:

$$2\left(\frac{ar}{2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{ar^2}{2} \Rightarrow ar = \frac{a + ar^2}{2} \Rightarrow ar = \frac{a(1+r^2)}{2}$$

$$\xrightarrow{a \neq 0} r = \frac{1+r^2}{2} \Rightarrow 2r = 1 + r^2 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

بنابراین، جملات دنباله هندسی و حسابی به صورت زیر خواهند بود:

$$\left.\begin{array}{l} \text{دنباله هندسی: } a, a, a, \ldots \rightarrow r = 1 \\ \text{دنباله حسابی: } \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \ldots \rightarrow d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r + d = 1$$

۳ ۲

نکته ۱:

معادلهٔ درجه ۲ با مختصات رأس $S\begin{vmatrix} x_S \\ y_S \end{vmatrix}$ برابر است با: $y = a(x - x_S)^2 + y_S$

نکته ۲:

اگر $A\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$، دو نقطهٔ هم‌عرض در سهمی باشند $(b_2 = a_2)$، آن‌گاه مختصات طول رأس به صورت $x_S = \frac{a_1 + b_1}{2}$ و عرض رأس به صورت $y_S = f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right)$ می‌باشد که $y = f(x)$ همان معادله درجه ۲ است. همچنین معادله خط محور تقارن سهمی به صورت $x = \frac{a_1 + b_1}{2}$ است.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که نقاط $A(۳,y)$ و $B(-۵,y)$ روی سهمی قرار دارند و چون عرض این نقاط برابر است، بنابراین طول رأس سهمی با میانگین طول این دو نقطه برابر است. پس:

$$\text{طول رأس سهمی}: x_S = \frac{-۵+۳}{۲} = \frac{-۲}{۲} = -۱$$

از طرفی، عرض رأس سهمی برابر ۱ است $(y_S = ۱)$، پس معادله سهمی به صورت زیر است:

$$y = a(x-x_S)^۲ + y_S \Rightarrow y = a(x+۱)^۲ + ۱ = ax^۲ + ۲ax + a + ۱$$

این سهمی محور xها را در دو نقطه با طول‌های α و β قطع می‌کند. پس:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -۲$$

می‌دانیم: $\alpha^۲ + \beta^۲ = ۵$:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta \Rightarrow ۵ = (-۲)^۲ - ۲\alpha\beta \Rightarrow ۲\alpha\beta = -۱ \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{۱}{۲}$$

یعنی ضرب ریشه‌های معادله $y = ax^۲ + ۲ax + a + ۱$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{a+۱}{a} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow -a = ۲a + ۲ \Rightarrow a = -\frac{۲}{۳}$$

از طرفی، ما به دنبال عرض از مبدأ سهمی هستیم. پس:

$$y = ax^۲ + ۲ax + a + ۱ \rightarrow \text{عرض از مبدأ}: a+۱ \xrightarrow{a=-\frac{۲}{۳}} \text{عرض از مبدأ} = \frac{۱}{۳}$$

---

۲ ۳

نکته ۱:

اگر $A \times B = B \times A$ باشد، یعنی به‌ازای هر عضوی در مجموعه A عضوی در مجموعهٔ B است و برعکس. به ازای هر عضوی در B، عضوی در A می‌باشد. پس:

$$(A \subseteq B \,,\, B \subseteq A) \Rightarrow A = B$$

نکته ۲:

مجموعه نمی‌تواند دارای اعضای تکراری باشد، پس برای مثال مجموعه زیر، دارای ۳ عضو است، نه ۵ عضو:

$$A = \{۱, ۲, (-۱)^۲, \sqrt{۴}, ۳\} = \{۱, ۲, ۳\}$$

پاسخ تشریحی:

$$S = a + b + c$$

$$۱)\ a-۲ = ۶ \begin{cases} ۲b+۱ = ۵ \rightarrow c = -۱ : S = ۹ \checkmark \\ ۲b+۱ = -۱ \rightarrow c = ۵ : S = ۱۲ \times \end{cases}$$

$$۲)\ a-۲ = ۵ \begin{cases} ۲b+۱ = ۶ \rightarrow c = -۱ : S = ۸/۵ \times \\ ۲b+۱ = ۵ \rightarrow c = -۱ : S = ۸ \times \\ ۲b+۱ = -۱ \rightarrow \begin{cases} c = ۶ : S = ۱۲ \times \\ c = ۵ : S = ۱۱ \times \\ c = -۱ : S = ۵ \times \end{cases} \end{cases}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

$$۳)\ a-۲=-۱\begin{cases}۲b+۱=۶\rightarrow c=۵:S=۸/۵\times\\ ۲b+۱=۵\rightarrow\begin{cases}c=-۱:S=۲\times\\ c=۵:S=۸\times\\ c=۶:S=۹\checkmark\end{cases}\\ ۲b+۱=-۱\rightarrow c=۵:S=۵\times\end{cases}$$

بنابراین، ۲ حالت، قابل قبول است.

---

۴ | ۱

نکته ۱:

دو گزارهٔ $(p\rightarrow q)$ و $(\sim p\vee q)$ هم‌ارز منطبقی یکدیگر می‌باشند. بنابراین از هر کدام از آن‌ها می‌توان به جای دیگری استفاده کرد.

نکته ۲:

در گزارهٔ شرطی $(p\rightarrow q)$، اگر ارزش گزارهٔ p، نادرست باشد، آن‌گاه به ازای هر ارزش برای گزارهٔ q، نتیجه درست خواهد بود.

p	q	$p\Rightarrow q$
ن	د	د
ن	ن	د

از این نکته در این تست استفاده خواهیم کرد.

پاسخ تشریحی:

باید با توجه به جدول، به بررسی گزینه‌ها بپردازیم:

بررسی موارد:

گزینه (۲) نادرست است، زیرا:

$$\text{سطر دوم}: \underbrace{(\text{ن}\Rightarrow\dots)}_{\text{د}}\Rightarrow\underbrace{(\text{د}\wedge\text{د})}_{\text{د}}\equiv\text{د}$$

گزینه‌های (۳) و (۴) نیز به همین صورت رد می‌شوند.

---

۴ | ۵

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دو $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه روابط زیر را خواهیم داشت:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\qquad P=\alpha\times\beta=\frac{c}{a}\qquad |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$y_S=-\frac{\Delta}{۴a}$ عرض رأس سهمی $\qquad x_S=-\frac{b}{۲a}$ طول رأس سهمی

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که α و β ریشه‌های معادله $ax^۲-ax-b=۰$ هستند. پس:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۱\\ \alpha\beta=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha=۱-\beta\end{cases}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

از طرفی: $۴۰\beta^۲+۲۰\alpha^۲-۲۰\beta=۱۷$ است، بنابراین:

$$۴۰\beta^۲+۲۰(۱-\beta)^۲-۲۰\beta=۱۷\Rightarrow ۴۰\beta^۲+۲۰-۴۰\beta+۲۰\beta^۲-۲۰\beta=۱۷$$

$$\Rightarrow ۶۰\beta^۲-۶۰\beta+۳=۰\Rightarrow ۲۰\beta^۲-۲۰\beta+۱=۰\Rightarrow ۲۰\beta(\underbrace{\beta-۱}_{-\alpha})+۱=۰$$

$$\Rightarrow -۲۰\alpha\beta+۱=۰\Rightarrow \alpha\beta=+\frac{۱}{۲۰}$$

می‌دانیم که $\alpha\beta=-\frac{b}{a}$ است، پس:

$$-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow a=-۲۰b$$

در معادله $ax^۲-ax-b=۰$ داریم:

$$-۲۰bx^۲+۲۰bx-b=۰\Rightarrow -۲۰x^۲+۲۰x-۱=۰$$

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۴۰۰-۴(-۲۰)(-۱)}}{۲۰}=\frac{\sqrt{۳۲۰}}{۲۰}=\frac{۸\sqrt{۵}}{۲۰}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

---

۶ ۳

برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادلهٔ اولیه را یافت.

پاسخ تشریحی:

$$\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۱-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}\Rightarrow \frac{(۱-x)^۲+x^۲}{x^۲(۱-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}$$

$$\frac{۲x^۲-۲x+۱}{(x(۱-x))^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}\Rightarrow \frac{۲(x^۲-x)+۱}{(x-x^۲)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}\Rightarrow \frac{۲(x^۲-x)+۱}{(x^۲-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}$$

حال، اگر $x^۲-x$ را برابر t فرض کنیم، داریم:

$$\frac{۲t+۱}{t^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}\xrightarrow{\times}۱۶۰t^۲-۱۸t-۹=۰\Rightarrow t^۲-۱۸t-۱۴۴۰=۰$$

$$\begin{cases}t'_۱=۴۸\\ t'_۲=-۳۰\end{cases}\xrightarrow{\div ۱۶۰}\begin{cases}t_۱=\frac{۴۸}{۱۶۰}=\frac{۳}{۱۰}\\ t_۲=\frac{-۳۰}{۱۶۰}=-\frac{۳}{۱۶}\end{cases}$$

می‌دانیم که $x^۲-x=t$ است.پس:

$$\begin{cases}x^۲-x=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow x^۲-x-\frac{۳}{۱۰}=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S_۱=۱\\ x^۲-x=-\frac{۳}{۱۶}\Rightarrow x^۲-x+\frac{۳}{۱۶}=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S_۲=۱\end{cases}$$

در نتیجه، مجموع ریشه‌ها برابر است با:

مجموع ریشه‌ها: $S_۱+S_۲=۱+۱=۲$

---

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۱۷

نکته ۱:

اگر $A\begin{vmatrix}a_1\\a_2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}b_1\\b_2\end{vmatrix}$، آن‌گاه مختصات نقطهٔ $M\begin{vmatrix}m_1\\m_2\end{vmatrix}$ در وسط ضلع AB برابر است با:

$$m_1=\frac{a_1+b_1}{2} \qquad m_2=\frac{a_2+b_2}{2}$$

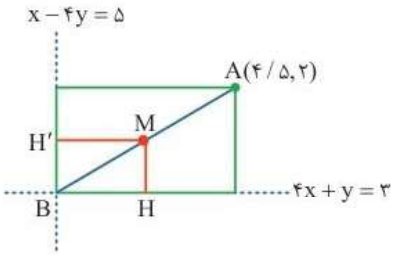
نکته ۲:

فاصلهٔ نقطه از خط: فاصلهٔ نقطهٔ $P\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$ از خط $Ax+By+C=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

پاسخ تشریحی:

چون نقطه $A(4/5,2)$ در هیچ‌یک از دو خط $4x+y=3$ و $x-4y=5$ صدق نمی‌کند، پس روی آن‌ها قرار ندارد:



ابتدا دو خط داده شده را با هم قطع می‌دهیم تا مختصات نقطه B به دست آید:

$$\times(-4)\begin{cases}4x+y=3\\x-4y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+y=3\\-4x+16y=-20\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\Rightarrow B(1,-1)$$

حال مختصات نقطه M را می‌یابیم:

$$\begin{cases}x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4/5+1}{2}=\frac{5/5}{2}=\frac{11}{4}\\y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

حال، فاصله نقطه M را از هر یک از خطوط $x-4y=5$ و $4x+y=3$ پیدا می‌کنیم:

$$MH=\frac{\left|4(\frac{11}{4})+\frac{1}{2}-3\right|}{\sqrt{16+1}}=\frac{\frac{17}{2}}{\sqrt{17}}=\frac{17}{2\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{2}\Rightarrow \text{بیشترین فاصله}$$

$$MH'=\frac{\left|\frac{11}{4}-4(\frac{1}{2})-5\right|}{\sqrt{16+1}}=\frac{\frac{17}{4}}{\sqrt{17}}=\frac{17}{4\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{4}$$

۱۸

اگر تابع $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

۱) نمودارهای $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگرند.

۲) اگر $\begin{vmatrix}a\\b\end{vmatrix}$ نقطه‌ای در $f(x)$ باشد، آن‌گاه $\begin{vmatrix}b\\a\end{vmatrix}$ نقطه‌ای در $f^{-1}(x)$ خواهد بود.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$، خط $g(x)=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. پس:

$$۱۲-x=۱۰\Rightarrow x=۲$$

یعنی نقطه تقاطع $f^{-۱}$ و g، به صورت $(۲,۱۰)$ است، پس:

$$f^{-۱}(۲)=۱۰\Rightarrow f(۱۰)=۲$$

$$\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}}=۲\Rightarrow ۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}=۴\Rightarrow ۲\sqrt{۱۰m-۱}=۶$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۰m-۱}=۳\Rightarrow ۱۰m-۱=۹\Rightarrow ۱۰m=۱۰\Rightarrow m=۱$$

حال باید مقدار $f(m+۴)$ را پیدا کنیم:

$$f(m+۴)\xrightarrow{m=۱} f(۵)=?$$

$$f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}\xrightarrow[m=۱]{x=۵} f(۵)=\sqrt{۵-۲\sqrt{۵-۱}}=۱$$

---

۹ | ۱

نکته۱:

اگر در هر a ساعت، یک عنصر رادیواکتیو $\frac{p}{q}$ از جرم خود را از دست بدهد، تابع مقدار جرم آن برحسب ساعت از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$m(t)=A(۱-\frac{p}{q})^{\frac{t}{a}}$$

A:جرم اولیه

تبصره: به جای ساعت، می‌توان دقیقه، سال، قرن و یا هر واحد زمان دیگری قرار داد.

نکته۲:

اگر a، b، c اعدادی مثبت بوده و $c\neq ۱$، آن‌گاه روابط زیر را داریم:

۱) $\log_c^a+\log_c^b=\log_c^{ab}$

۲) $\log_c^a-\log_c^b=\log_c^{\frac{a}{b}}$

۳) $\log_{c^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_c^a$

۴) $\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

۵) $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$

۶) $\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}\ (a,b\neq ۱)$

پاسخ تشریحی:

عنصر مورد نظر در هر ساعت $\frac{۱}{۹}$ از جرم باقی‌مانده خود را از دست می‌دهد، پس:

$$T=۱$$

$$m(t)=A(\frac{۸}{۹})^{\frac{t}{T}}$$

حال برای اینکه بدانیم این عنصر پس از چند دقیقه، $\frac{۱}{۶}$ از جرمش باقی می‌ماند، داریم:

$$\frac{۱}{۶}A=A(\frac{۸}{۹})^t\Rightarrow(\frac{۸}{۹})^t=\frac{۱}{۶}$$

از طرفین رابطه فوق در مبنای ۵، لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_۵^{(\frac{۸}{۹})^t}=\log_۵^{\frac{۱}{۶}}\Rightarrow t\log_۵^{\frac{۸}{۹}}=\log_۵^{\frac{۱}{۶}}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

$$t(\log_5^8-\log_5^9)=\log_5^1-\log_5^6 \Rightarrow t(\log_5^{2^3}-\log_5^{3^2})=-\log_5^6$$

$$t(\frac{3}{\log_2^5}-\frac{2}{\log_3^5})=-(\frac{1}{\log_2^5}+\frac{1}{\log_3^5})$$

$$t(\frac{3}{2/4}-\frac{2}{1/4})=-(\frac{1}{2/4}+\frac{1}{1/4}) \Rightarrow t(\frac{5}{4}-\frac{10}{7})=-(\frac{5}{12}+\frac{5}{7})$$

$$t(-\frac{5}{28})=-(\frac{95}{84}) \Rightarrow t=\frac{\frac{95}{84}}{\frac{5}{28}}=\frac{28\times 95}{84\times 5}=\frac{19}{3} \Rightarrow t=\frac{19}{3}(hr)$$

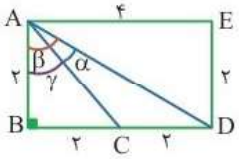
یعنی در $\frac{19}{3}$ ساعت یا همان ۳۸۰ دقیقه $\frac{1}{6}$ از جرم عنصر باقی می‌ماند:

$$t=\frac{19}{3}\times 60=380(min)$$

---

۱۰ ۲

روش اول:



از طرفی:

$A\hat{B}C$ در مثلث قائم‌الزاویه : $AC=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$A\hat{E}D$ در مثلث قائم‌الزاویه : $AD=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

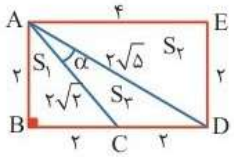
$$\tan\alpha=\tan(\beta-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}\ ;\ \begin{cases}\tan\beta=\frac{BD}{AB}=2\\ \tan\gamma=\frac{BC}{AB}=1\end{cases}$$

$$\tan\alpha=\frac{2-1}{1+(2)(1)}=\frac{1}{3} \xrightarrow{\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}} \cot\alpha=3$$

نگاه دیگر: مثلث $A\hat{B}C$، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس $\gamma=45^\circ$

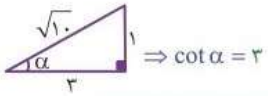
$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{BD}{AB}=2 \Rightarrow \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2 \Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{3}$$

روش دوم:



$$S_{کل}=S_1+S_2+S_3$$

$$8=2+4+(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}\times\sin\alpha) \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

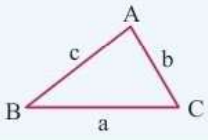


$\Rightarrow \cot\alpha=3$

---

۱۱ ۱

مساحت مثلث $A\hat{B}C$ از روابط زیر به دست خواهد آمد.



$$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B}=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$$

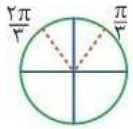
www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۶\times\sqrt{۳}\times\sin\alpha=۴/۵\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\begin{cases}\alpha_۱=\frac{\pi}{۳}\\ \alpha_۲=\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha_۲}{\alpha_۱}=\frac{\frac{۲\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۳}}=۲$$



۱۲ | ۴

نکته ۱:

نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر کمان:

$$\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۱-۲\sin^۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$$

$$\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$$

نکته ۲:

نسبت‌های مثلثاتی $(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)$:

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\cos\theta\qquad\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=\cot\theta\qquad\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$$

نکته ۳:

دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی:

۱) $a\sin(bx+c)+d\ ,\ a\cos(bx+c)+d\ ,\ [a\sin(bx+c)+d]^m,[a\cos(bx+c)+d]^m$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}$$ m: عددی فرد

۲) $[a\sin(bx+c)+d]^m,[a\cos(bx+c)+d]^m,a\tan(bx+c)+d,a\cot(bx+c)+d$

$$T=\frac{\pi}{|b|}$$ m: عددی زوج

نکته ۴:

معادلات مثلثاتی:

۱) $\sin\alpha=\sin\beta$

$\alpha=۲k\pi+\beta\ ,\ \alpha=۲k\pi+\pi-\beta$

۲) $\cos\alpha=\cos\beta\qquad\alpha=۲k\pi\pm\beta$

۳) $\tan\alpha=\tan\beta$ یا $\cot\alpha=\cot\beta\quad\alpha=k\pi+\beta$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

به کمک رابطه $\sin 2\bigcirc = 2\sin\bigcirc\cos\bigcirc$ داریم:

$$f(x) = a + b\underbrace{\sin(cx - \frac{3\pi}{4})\cos(cx - \frac{3\pi}{4})}_{\frac{1}{2}\sin 2(cx - \frac{3\pi}{4})} = a + \frac{b}{2}\sin(2cx - \frac{3\pi}{2})$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2}\sin\Big(-(\frac{3\pi}{2} - 2cx)\Big) = a - \frac{b}{2}\underbrace{\sin(\frac{3\pi}{2} - 2cx)}_{-\cos(2cx)}$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2}\cos(2cx)$$

به کمک نمودار تابع می‌توان فهمید که:

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1$$

$$\begin{cases} f(0) = -1 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = -1 \Rightarrow 2a + b = -2 \\ f(\frac{\pi}{2}) = 3 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow 2a - b = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

پس:

$$f(x) = 1 - 2\cos 2x \xrightarrow{f(x)=0} 1 - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{[0,\pi]} \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف}} \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

---

۱۳ ۳

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه:

۱) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

۲) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

۳) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

پاسخ تشریحی:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

طرفین رابطه فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$1 - \sin 2x = \frac{6}{9} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

حال در رابطه صورت سوال، داریم:

$$m(\cos x - \sin x) - ۳\sqrt{۶}\sin(۲x) = \sqrt{۶}$$

$$m(\frac{\sqrt{۶}}{۳}) - ۳\sqrt{۶}(\frac{۱}{۳}) = \sqrt{۶} \Rightarrow \sqrt{۶}(\frac{m}{۳} - ۱) = \sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{۳} - ۱ = ۱ \Rightarrow \frac{m}{۳} = ۲ \Rightarrow m = ۶$$

---

۱۴ | ۱

تابع f را نزولی گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_۱ > x_۲ \Leftrightarrow f(x_۱) \le f(x_۲)$$

تابع f را صعودی گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_۱ > x_۲ \Leftrightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲)$$

تابع f را نزولی اکید گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_۱ > x_۲ \Leftrightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

تابع f را صعودی اکید گوییم هرگاه داشته باشیم به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ $f(x)$:

$$x_۱ > x_۲ \Leftrightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$

تابع f را غیریکنوا گوییم هرگاه نه صعودی خالص و نه نزولی خالص باشد. یعنی در قسمتی از دامنه صعودی و در قسمتی دیگر از دامنه نزولی باشد.

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که تابع f اکیداً نزولی است، یعنی $f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \alpha > \beta$

$$f(m^۲ - m - ۵) < f(-۳ + ۲m - m^۲) \Rightarrow m^۲ - m - ۵ > -۳ + ۲m - m^۲ \Rightarrow ۲m^۲ - ۳m - ۲ > ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} m > ۲ \\ \text{یا} \\ m < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

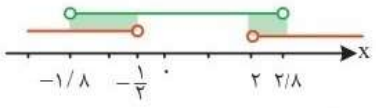
از طرفی، دامنه تابع f مجموعه‌ای از مقادیر منفی است، یعنی:

$$-۳ + ۲m - m^۲ < ۰ \xrightarrow[\Delta < ۰]{a < ۰} \text{همواره منفی}$$

$$m^۲ - m - ۵ < ۰ \Rightarrow m = \frac{۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۲} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \underbrace{\frac{۱ - \sqrt{۲۱}}{۲}}_{\simeq -۱/۸} < m < \underbrace{\frac{۱ + \sqrt{۲۱}}{۲}}_{\simeq ۲/۸}$$

پس:

$$m \in (-۱/۸, -\frac{۱}{۲}) \cup (۲, ۲/۸) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -۱$$



پس m دارای یک مقدار صحیح است.

---

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۱۵ ۳

حد در $\pm\infty$:

اگر f و g، دو چندجمله‌ای از درجهٔ m و n باشند، آن‌گاه داریم:

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

$$g(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

۱) $m>n \leftarrow L=\infty$ یا $L=-\infty$

۲) $m<n \leftarrow L=0$

۳) $m=n \leftarrow L=\frac{a_m}{b_n}$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که اگر $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$؛ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، تابعی هموگرافیک باشد، در این صورت:

$$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

طبق گفته سوال: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$، پس:

$$g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}\xrightarrow{g^{-1}}g^{-1}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$$

از طرفی:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-1}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{-bx+d}{ax-c}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(ax+b)(ax-c)}{(cx+d)(-bx+d)}=\frac{a^2x^2}{-bcx^2}=\frac{a^2}{-bc}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-bx+d}{ax-c}}{\frac{cx+d}{ax+b}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+b)(-bx+d)}{(cx+d)(ax-c)}=\frac{-bax^2}{cax^2}=\frac{-b}{c}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{-bc}=\frac{-b}{c}\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow a=\pm b$$

در نتیجه، حاصل خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x\to0^+}f^{-1}(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{-dx+b}{cx-a}=-\frac{b}{a}\xrightarrow{a=\pm b}\pm1$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۱۶ ۲

برای محاسبهٔ حد چپ و راست در جزء صحیح داریم:

۱) $\lim\limits_{x\to k^+}[x]$ ۲) $\lim\limits_{x\to k^-}[x]$ ۳) $\lim\limits_{x\to k^+}[-x]$ ۴) $\lim\limits_{x\to k^-}[-x]$

حالت ۱) اگر $k\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه مقدار تابع داده شده را به ازای $x=k$ حساب می‌کنیم.

مثال:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}[-x]=\left[-\frac{1}{2}\right]=-1$$

حالت ۲) اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد، داریم:

حد ۱ $=k$

حد ۲ $=k-1$

حد ۳ $=-k-1$

حد ۴ $=-k$

پاسخ تشریحی:

اگر n فرد باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to n^+}f(x)=n^+-\left[n^+\right]+k=k\\ f(n)=k \qquad\qquad \Rightarrow 2n=k\\ \lim\limits_{x\to n^-}f(x)=\left|n^--\left[-(n^-)\right]\right|=\left|n^--\left[(-n)^+\right]\right|=|2n|=2n\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-n)^+}f(x)=(-n)^+-\left[(-n)^+\right]+k=k\\ f(-n)=k \qquad\qquad \Rightarrow 2n=k\\ \lim\limits_{x\to(-n)^-}f(x)=\left|(-n)-\left[n^+\right]\right|=|-2n|=2n\end{cases}$$

اگر n زوج باشد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to n^+}f(x)=\left|n^+-\left[-(n)^+\right]\right|=2n+1\\ f(n)=\left|n-[-n]\right|=2n \qquad\qquad \Rightarrow 2n\neq 2n+1\neq k+1\\ \lim\limits_{x\to n^-}f(x)=n^--\underset{n-1}{\left[n^-\right]}+k=k+1\end{cases}$$

پس n فرد است.

---

۱۷ ۳

قاعدهٔ هوپیتال: اگر $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت $\frac{\cdot}{\cdot}$ در بیاید می‌گوییم حد مبهم است. برای رفع ابهام آن می‌توان از روش زیر کمک گرفت:

اگر f و g مشتق‌پذیر باشند:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

ابتدا تابع $g(x)$ را می‌سازیم:

$$f(x)=xg(x)+1\Rightarrow g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP} f'(0)$$

$$f(x)=\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2$$

$$f'(x)=2\left(\frac{\cos x(1+\sin x)-(\cos x)(-1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}\right)\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)$$

حال، $x=0$ را جایگزین می‌کنیم:

$$f'(0)=2\left(\frac{1+1}{1}\right)\left(\frac{-1}{1}\right)=-4$$

توجه:

$$f(x)=u^n\Rightarrow f'(x)=nu'u^{n-1}$$

---

۱۸ | ۱

نکته۱:

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر است با: $m=f'(a)$

نکته۲:

قرینهٔ تابع $y=f(x)$

۱) نسبت به محور xها: $y=-f(x)$

۲) نسبت به محور yها: $y=f(-x)$

۳) نسبت به مبدأ مختصات: $y=-f(-x)$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم خط d که موازی محور xها است، قرینه سهمی $y=x^2+1$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند:

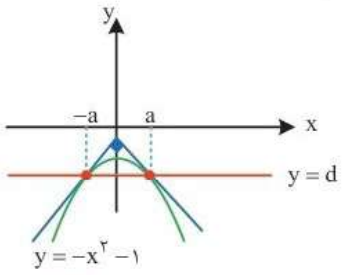
$$y=x^2+1\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y_.=-x^2-1$$

از طرفی، $y'_.=-2x$ و اگر طول نقاط برخورد خط افقی d با منحنی $y_.=-x^2-1$ را به صورت $-a$ و a فرض کنیم، داریم:

$$y'=-2x\Rightarrow\begin{cases}y'(a)=-2a\\ y'(-a)=2a\end{cases}$$

می‌دانیم که خطوط مماس بر هم عمودند، پس:

$$(2a)(-2a)=-1\Rightarrow a^2=\frac{1}{4}\xrightarrow{a>0} a=\frac{1}{2}$$



www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

بنابراین، طول نقاط برخورد به صورت $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=-\frac{۱}{۲}$ است. حال، اگر یکی از این نقاط را در ضابطه تابع $y=-x^۲-۱$ جایگذاری کنیم، عرض نقطه تقاطع به دست می‌آید:

$$y=-x^۲-۱ \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} y=-\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۵}{۴}$$

بنابراین، مختصات نقاط برخورد به صورت $A(-\frac{۱}{۲},-\frac{۵}{۴})$ و $B(\frac{۱}{۲},-\frac{۵}{۴})$ است و فاصله خط d از مبدأ، همان عرض نقاط برخورد است که برابر است با:

$$\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

---

۱۹ ۴

تعریف نقطهٔ عطف: فرض کنیم تابع f در نقطهٔ $x=c$ پیوسته است. در این صورت، نقطهٔ $(c,f(c))$ نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه ۲ شرط زیر را داشته باشد:

۱) نمودار f در نقطهٔ $(c,f(c))$ خط مماس داشته باشد.

۲) جهت تقعر f در نقطهٔ $(c,f(c))$ تغییر کند.

تبصره: معمولاً در سوالات کنکور با دو بار مشتق گرفتن از تابع و برابر صفر قرار دادن آن، نقاط عطف پیدا می‌شوند.

$f''(x)=۰$ (x طول نقطهٔ عطف)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که نقطه عطف تابع $y=kx^۳+(k+۱)x^۲$ باید در ناحیه دوم باشد، یعنی:

اولاً: طول نقطه عطف باید منفی باشد:

$$y'=۳kx^۲+۲(k+۱)x \Rightarrow y''=۶kx+۲(k+۱)=۰$$

$$۶kx+۲k+۲=۰ \Rightarrow x=\frac{-k-۱}{۳k}<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} k>۰ \\ \text{یا} \\ k<-۱ \end{cases} \quad (A)$$

ثانیاً: عرض نقطه عطف باید مثبت باشد، یعنی: $f(\frac{-k-۱}{۳k})>۰$

$$k(\frac{-k-۱}{۳k})^۳+(k+۱)(\frac{-k-۱}{۳k})^۲>۰ \Rightarrow \frac{-(k+۱)^۳}{۲۷k^۲}+\frac{(k+۱)^۳}{۹k^۲}>۰$$

$$\frac{-(k+۱)^۳+۳(k+۱)^۳}{۲۷k^۲}>۰ \Rightarrow \frac{۲(k+۱)^۳}{\underbrace{۲۷k^۲}_{+}}>۰$$

$$\Rightarrow ۲(k+۱)^۳>۰ \Rightarrow (k+۱)^۳>۰ \Rightarrow k+۱>۰ \Rightarrow k>-۱ \quad (B)$$

حال، بین مجموعه‌های (A) و (B) اشتراک می‌گیریم:

$$\xrightarrow{A\cap B} k>۰$$

بنابراین، هیچ مقدار صحیح و منفی برای k وجود ندارد.

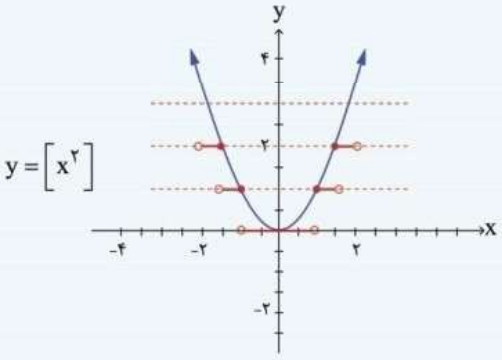
---

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۲۰ ۲

برای رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$، نمودار $f(x)$ و خطوط $y=k$ که $k\in\mathbb{Z}$ را رسم کرده و نمودار تابع $f(x)$ را بر روی این خطوط تصویر می‌کنیم. یعنی:



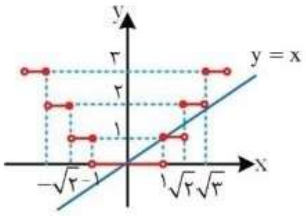
آبی $\rightarrow f(x)$

قرمز $\rightarrow [f(x)]$

تبصره: نقاط برخورد $y=k$ و $y=f(x)$ را بدون تغییر دست نخورده باقی می‌گذاریم.

پاسخ تشریحی:

ابتدا نمودار $y=[x^2]$ و $y=x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



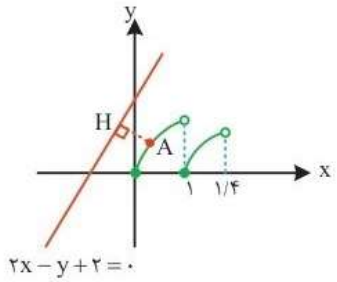
دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt{x-[x^2]}\Rightarrow x-[x^2]\geq 0\Rightarrow x\geq [x^2]$$

با توجه به نمودار فوق مشخص است که در فاصله $[0,\sqrt{2})$ نمودار تابع $y=x$، بالاتر از نمودار تابع $y=[x^2]$ قرار دارد و یا برابر آن است، پس:

$$\begin{cases} 0\leq x<1\rightarrow 0\leq x^2<1\rightarrow [x^2]=0\rightarrow y=\sqrt{x} \\ 1\leq x<\sqrt{2}\rightarrow 1\leq x^2<2\rightarrow [x^2]=1\rightarrow y=\sqrt{x-1} \end{cases}$$

حال، اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x-[x^2]}$ و $2x-y+2=0$ را در یک دستگاه رسم کنیم، داریم:



همانطور که می‌بینید کم‌ترین فاصله نقاط نمودار تابع $y=\sqrt{x-[x^2]}$، از خط $2x-y+2=0$، مربوط به ضابطه $y=\sqrt{x}$; $0\leq x<1$ است. حال، اگر نقطه مورد نظر را به صورت $A(x,\sqrt{x})$ در نظر بگیریم، داریم:

$$AH=\frac{|2x-\sqrt{x}+2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|2x-\sqrt{x}+2|}{\sqrt{5}}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

اگر بخواهیم این فاصله کمترین باشد، باید:

$$(AH)' = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}) = ۰ \Rightarrow ۲ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = ۲$$

$$\Rightarrow ۴\sqrt{x} = ۱ \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۶}$$

بنابراین، کمترین مقدار AH، به ازای $x = \frac{۱}{۱۶}$ اتفاق می‌افتد:

$$AH = \frac{|۲x - \sqrt{x} + ۲|}{\sqrt{۵}} \xrightarrow{x=\frac{۱}{۱۶}} (AH)_{min} = \frac{|\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۴} + ۲|}{\sqrt{۵}} \Rightarrow (AH)_{min} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$$

۴ ۲۱

نکته ۱:

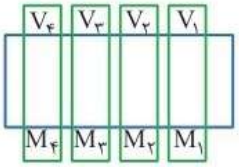
به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعهٔ r عضوی از یک مجموعهٔ nعضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (۰ \le r \le n)$$

نکته ۲:

گاهی اوقات تعداد افراد را در حالت بندی (جایگشت‌ها) باید به صورت چند دسته درنظر گرفت تا حل سوال آسان‌تر صورت گیرد. مثل این سوال که باید هر وزیر و معاونش را به صورت یک دسته در نظر بگیریم.

پاسخ تشریحی:



هر وزیر و معاون مربوط به خودش را در یک بسته و در مقابل هم قرار می‌دهیم:

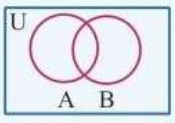
$$\text{جابجایی ۴ بسته} \downarrow ۴! \times \overbrace{۲\times۲\times۲\times۲}^{\text{جابجایی هرکدام از وزیر و معاونش در یک بسته}} = ۳۸۴$$

۴ ۲۲

در هر مجموعهٔ مرجعی مانند U همواره روابط زیر برقرارند:

۱) $\max\big(n(A)\big) = n(U)$

۲) $\max\big(n(A \cap B)\big) = \underbrace{n(B-A)}_{n(A)}$ (می‌دانیم : $n(B) \ge n(A)$)



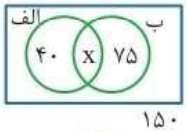
پاسخ تشریحی:

برای حل بهتر است از نمودار استفاده کنید:

$$۴۰ + x + ۷۵ \le ۱۵۰$$

$$x \le ۳۵ \Rightarrow x_{max} = ۳۵$$

$$\max\left(\frac{P(A)}{P(B)}\right) = \max\left(\frac{۴۰+x}{۷۵+x}\right)$$



www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

این عبارت زمانی max است که x بیشترین مقدار خود را داشته باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\max\left(\frac{P(A)}{P(B)}\right)=\frac{۴۰+۳۵}{۷۵+۳۵}=\frac{۷۵}{۱۱۰}=\frac{۱۵}{۲۲}$$

---

۲۳ ۳

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که بیش‌ترین اختلاف مربوط به ۹ و ۱۹ است که ۱۰ می‌شود. اما اعداد زوج از ۱۰ شروع می‌شوند، بنابراین، برای اینکه میانگین بیش‌ترین مقدار ممکن باشد به اعداد زوج نباید دست زد و باید به همان طریقی که هستند در بین اعداد قرار داشته باشند.

۱۰ ۱۲ ۱۴ ۱۶ ۱۸

۹ ۱۱ ۱۳ ۱۵ ۱۷ ۱۹

اما برای اعداد فرد باید ۲ عدد را انتخاب کرد و با اختلاف آن‌ها جایگذاری کنیم. در این جا، چند نکته وجود دارد.

۱) محل برداشتن و جایگذاری آن با اختلاف آن‌ها را فقط یک بار برای هر دو عدد انجام می‌دهیم. زیرا در غیر این صورت و با تکرار آن، بیش‌ترین میانگین نقض می‌شود.

۲) ۳ عدد فرد بزرگ‌تر باید دارای علامت مثبت و ۳ عدد فرد کوچک‌تر باید دارای علامت منفی باشند تا بیش‌ترین مقدار میانگین حاصل گردد.

مثلاً نمی‌توان ۲ عدد ۱۹ و ۱۵ را به عنوان یک جفت عدد انتخاب کرد، زیرا در این صورت، عدد ۱۵ دارای علامت منفی می‌شود.

$+۱۹-۱۵=۴$
↓ ↓
مثبت منفی

۳) به دلیل اینکه اعداد زوج تکراری به دست نیاید، تنها ۲ حالتی که می‌توان اعداد فرد باید به صورت جفت انتخاب کرد، طوری که میانگین بیش‌ترین مقدار باشد، برابر هستند با:

$(۱۹,۱۱)\ (۱۷,۱۳)\ (۱۵,۹)$
$۸ + ۴ + ۶ = ۱۸$
$(۱۹,۱۳)\ (۱۷,۹)\ (۱۵,۱۱)$
$۶ + ۸ + ۴ = ۱۸$

حال، انحراف معیار اعداد ۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸ را حساب می‌کنیم.

$$\bar{x}=۱۱ \quad \sigma^۲=\frac{\left[(۴-۱۱)^۲+(۶-۱۱)^۲+(۸-۱۱)^۲+(۱۰-۱۱)^۲\right]\times ۲}{۸}=۲۱\Rightarrow\sigma=\sqrt{۲۱}$$

چون دنباله حسابی داشتیم از فرمول $\sigma^۲=\frac{n^۲-۱}{۱۲}d^۲$ نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

---

۲۴ ۱

احتمال شرطی: در صورتی که B پیشامدی باشد که $P(B)>۰$، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ دادن B» (که در آن «p ی A به شرط B» نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

احتمال غیرهم‌شانس: از فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S=\{S_۱,S_۲,...,S_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_۱,a_۲,...,a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

۱) $۰\le P(A)\le ۱$ ۲) $P(S)=۱$ ۳) $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+...+P(a_k)$

تبصره: در این سوال، $P(A)=\frac{۲}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$ می‌باشد.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

با توجه به اطلاعات سوال، در نهایت حرف A چاپ شده است، بنابراین تمام حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم:

حالت‌ها	احتمال رخ دادن حالت	
AAAA	$\frac{۲}{۱۹۲}$	پیشامدهای مطلوب
ABAA	$\frac{۱۸}{۱۹۲}$	
AABA	$\frac{۱۸}{۱۹۲}$	
ABBA	$\frac{۱۸}{۱۹۲}$	
BAAA	$\frac{۳}{۱۹۲}$	فضای نمونه‌ای
BABA	$\frac{۲۷}{۱۹۲}$	
BBAA	$\frac{۳}{۱۹۲}$	
BBBA	$\frac{۳}{۱۹۲}$	

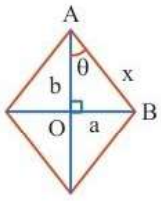
$$P(\text{A چاپ شده است} \mid \text{ورودی A باشد}) \frac{۲+۱۸+۱۸+۱۸}{۲+۱۸+۱۸+۱۸+۲۷+۳+۳+۳} = \frac{۵۶}{۹۲} = \frac{۱۴}{۲۳}$$

۲۵ ۲

اگر در یک چهارضلعی، ۲ قطر آن عمود بر هم باشند، آن‌گاه داریم:

$$S = \frac{۱}{۲} d_۱ d_۲$$

پاسخ تشریحی:



فرض سوال: $x^۲ = (۲a)(۲b) = ۴ab$

$$S_{\text{لوزی}} = \frac{۱}{۲} \times (۲a)(۲b) = x^۲ \sin A$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A = ۳۰^\circ \Rightarrow \theta = ۱۵^\circ$$

۲۶ ۴

حالت‌های تشابه دو مثلث:

حالت ۱) ۲ زاویهٔ برابر:

$$(\hat{A} = \hat{A}' , \hat{B} = \hat{B}') \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \simeq A'\overset{\triangle}{B}'C'$$

حالت ۲) ۲ ضلع متناسب و زاویهٔ بین ۲ ضلع برابر:

$$(\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} , \hat{A} = \hat{A}') \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \simeq A'\overset{\triangle}{B}'C'$$

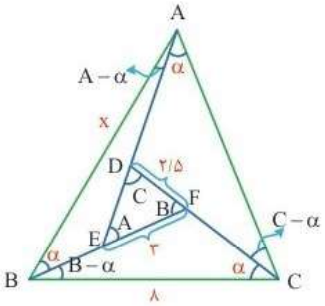
حالت ۳) ۳ ضلع متناسب:

$$(\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}) \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \simeq A'\overset{\triangle}{B}'C'$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:



$\hat{EFD} = B - \alpha + \alpha = \hat{B}$ خارجی

$\hat{DEF} = A - \alpha + \alpha = \hat{A}$ خارجی

$\hat{EDF} = C - \alpha + \alpha = \hat{C}$ خارجی

بنابراین، مثلث $\overset{\triangle}{DEF}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ با یکدیگر متشابه‌اند و خواهیم داشت:

$$\frac{۲/۵}{۸} = \frac{۳}{x} \Rightarrow x = \frac{۳\times ۸}{۲/۵} = ۹/۶$$

---

۲۷ ۱

نکته۱:

در دو مثلث، اگر اندازهٔ قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

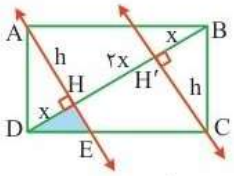
نکته۲:

در دو مثلث که اندازهٔ ۲ ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

نکته۳:

در هر مستطیل، هر قطر آن را به ۲ مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند، پس مساحت هر کدام از مثلث‌ها نصف مساحت مستطیل می‌باشد.

پاسخ تشریحی:



$$\frac{S_{ABCD}}{S_{D\hat{E}H}} = \frac{۲S_{A\hat{B}D}}{S_{D\hat{E}H}} = \frac{۲(\frac{۱}{۲}\times BD\times h)}{\frac{۱}{۲}\times HE\times DH} = \frac{۲(۴x)\times h}{(x)\times HE} = \frac{۸h}{HE} \quad (*)$$

از طرفی به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{DH'C}$، داریم:

$$H'C \parallel HE : \frac{DH}{DH'} = \frac{HE}{H'C} \Rightarrow \frac{x}{۳x} = \frac{HE}{h} \Rightarrow HE = \frac{h}{۳}$$

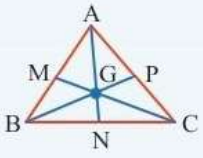
حال، در رابطه $(*)$ داریم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{D\hat{E}H}} = \frac{۸h}{HE} \xrightarrow{HE=\frac{h}{۳}} \frac{S_{ABCD}}{S_{D\hat{E}H}} = \frac{۸h}{\frac{h}{۳}} = ۲۴$$

---

۲۸ ۴

۳ میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند. به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر این ضلع است و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.



$$MG = \frac{۱}{۳}MC \quad GN = \frac{۱}{۳}AN \quad GP = \frac{۱}{۳}BP$$

$$GC = \frac{۲}{۳}MC \quad AG = \frac{۲}{۳}AN \quad BG = \frac{۲}{۳}BP$$

www.biomaze.ir

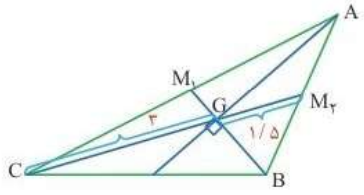
t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم مرکز ثقل (محل برخورد میانه‌ها) هر مثلث، میانه را به نسبت ۲ و ۱ تقسیم می‌کند.

از طرفی، با رسم سه میانه، مثلث به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود، بنابراین مساحت هر مثلث $\frac{۱۸}{۶}=۳$ است.

$$S_{BGM_۲}=۳\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times BG\times ۱/۵=۳\Rightarrow BG=\frac{۶}{۱/۵}=۴\Rightarrow GM_۱=۲$$



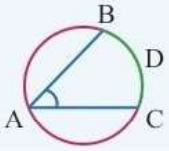
بنابراین:

$$\frac{BM_۱}{CM_۲}=\frac{۶}{۴/۵}=\frac{۴}{۳}$$

۲۹ ۲

نکته۱:

زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل ۲ وتر از دایره باشند:

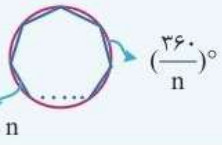


$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BDC}}{۲}$$

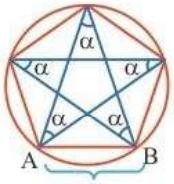
اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف کمان مقابل به آن است.

نکته۲:

اگر یک n ضلعی منتظم را در داخل یک دایره محاط کنیم، اندازهٔ کمان متناظر با هر ضلع nضلعی برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ خواهد بود.



پاسخ تشریحی:



$$\frac{۳۶۰^\circ}{۵}=۷۲^\circ$$

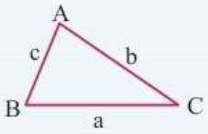
$$\Rightarrow \text{زاویه محاطی } \hat{\alpha}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۷۲^\circ}{۲}=۳۶^\circ$$

در نتیجه، مجموع زوایای محاطی $۵\times ۳۶=۱۸۰^\circ$ خواهد بود.

۳۰ ۴

نکته۱:

دستور هرون برای محاسبهٔ مساحت مثلث:



$$P=\frac{a+b+c}{۲}\qquad S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

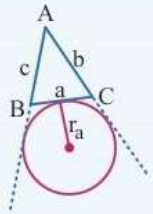
نکته۲:

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی: اگر یک دایره، محاط در یک n ضلعی به مساحت S و محیط $۲P$ باشد، آنگاه شعاع دایره محاطی برابر است با: $r=\frac{S}{P}$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

نکته ۳:



شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث: اگر مساحت مثلث $\hat{ABC}$ ، S و محیط آن $2P$ باشد، داریم: $r_a = \frac{S}{P-a}$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع a از مثلث $\hat{ABC}$ با محیط $2P$ و مساحت S برابر است با:

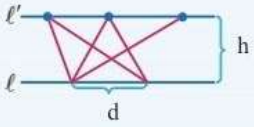
$$r_a = \frac{S}{P-a} \Rightarrow \begin{matrix} 2P = 9+8+7 = 24 \Rightarrow P = 12 \\ S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{12\times3\times4\times5} = 12\sqrt{5} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow r_a = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2/4\sqrt{5}$$

۳۱ ۲

نکته:

در بین مثلث‌هایی با مساحت S و قاعدهٔ d، کمترین مقدار محیط برای مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد. زیرا در این حالت، ارتفاع نیز مشخص است و رأس روبه‌رو به قاعده قطعاً روی خطی موازی ضلع قاعده و به فاصلهٔ ارتفاع h از آن است.



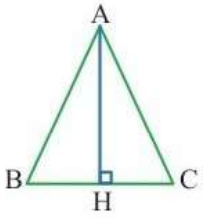
پاسخ تشریحی:

کمترین مقدار محیط زمانی اتفاق می‌افتد که مثلث متساوی‌الساقین است و مطابق فرض سوال قاعده ۱۵ دارد.

$$S = \frac{1}{2}AH\times15 = 30 \Rightarrow AH = 4$$

$$\hat{AHC}: AC^2 = (\frac{15}{2})^2 + 16 = \frac{289}{4} \Rightarrow AC = \frac{17}{2}$$

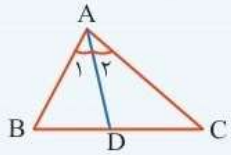
$$\hat{ABC}\text{ محیط}: 2(\frac{17}{2}) + 15 = 32$$



۳۲ ۱

نکته:

قضیهٔ نیمسازها: (۱) در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.



$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

(۲) در هر مثلث، مربع هر نیمساز داخلی برابر است با:

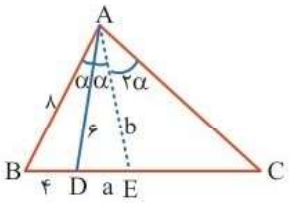
$$AD^2 = AB.AC - BD.DC$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

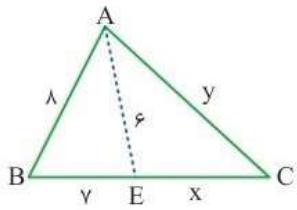
اگر AE را نیمساز زاویه A در نظر بگیریم، با استفاده از قضیه نیمسازها می‌توانیم بنویسیم:



$$\triangle ABE: \frac{۸}{b}=\frac{۴}{a}\Rightarrow b=۲a$$

$$AD^۲=AB\times AE-BD\times DE\Rightarrow ۳۶=۸b-۴a=۱۶a-۴a=۱۲a\Rightarrow a=۳\ ,\ b=۶$$

و همین مراحل را برای مثلث $\triangle ABC$ انجام می‌دهیم:



$$\frac{۸}{y}=\frac{۷}{x}\Rightarrow y=\frac{۸}{۷}x$$

$$AE^۲=AB\times AC-BE\times EC$$

$$۳۶=۸y-۷x=\frac{۶۴}{۷}x-۷x=\frac{۱۵}{۷}x$$

$$\Rightarrow x=۳۶\times\frac{۷}{۱۵}=۱۶/۸\ ,\ y=۱۹/۲$$

---

۳۳ | **۴**

دترمینان ماتریس

۱) $۱\times۱\Leftarrow$

$$A=[a]\Rightarrow |A|=a$$

۲) $۲\times۲\Leftarrow$

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

۳) $۳\times۳\Leftarrow$

$$A=\begin{bmatrix}a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\\ c_۱ & c_۲ & c_۳\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=a_۱\begin{vmatrix}b_۲ & b_۳\\ c_۲ & c_۳\end{vmatrix}-a_۲\begin{vmatrix}b_۱ & b_۳\\ c_۱ & c_۳\end{vmatrix}+a_۳\begin{vmatrix}b_۱ & b_۲\\ c_۱ & c_۲\end{vmatrix}$$

پاسخ تشریحی:

$$|A|=(\log_۶^۳)^۲-(\log_۶^۲)^۲=(\log_۶^۳-\log_۶^۲)(\log_۶^۳+\log_۶^۲)$$

$$=\log_۶^{\frac{۳}{۲}}\times\log_۶^۶=\log_۶^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow ۶^{|A|}=\frac{۳}{۲}\ (*)$$

با جایگذاری عبارت (*) در دترمینان B خواهیم داشت:

$$B=\begin{bmatrix}۶^{|A|} & ۳^{|A|}\\ ۳^{|A|} & ۳۶^{|A|}\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=۶^{|A|}\times۳۶^{|A|}-۳^{|A|}\times۲^{|A|}=۶^{۳|A|}-۶^{|A|}=(\frac{۳}{۲})^۳-(\frac{۳}{۲})=\frac{۱۵}{۸}$$

---

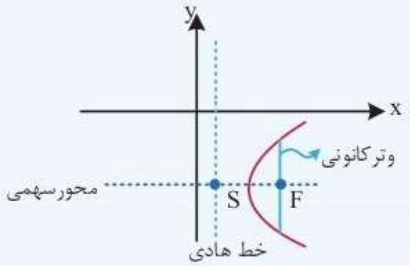
www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۳۴ ۲

به خطی که از کانون سهمی گذشته و بر محور سهمی عمود است، وتر کانونی سهمی می‌گویند. طول وتر کانونی سهمی برابر $4a$ است که a فاصلهٔ کانونی سهمی می‌باشد.

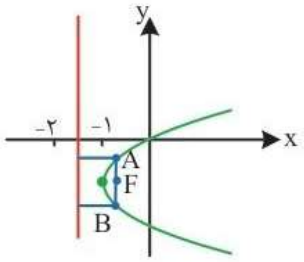
برای مثال، سهمی افقی زیر را ببینید:



پاسخ تشریحی:

سهمی را به طور دلخواه افقی در نظر می‌گیریم. در نتیجه، چون رأس سهمی $(-1,-1)$ است. خواهیم داشت:

$$(y+1)^2 = 4a(x+1) \xrightarrow{\text{جایگذاری نقطه}(1,1)} 4 = 4a\times 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$



$$\text{قطر} = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

۳۵ ۳

نکته ۱:

ضرب داخلی: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضا باشند، آن‌گاه داریم:

θ: زاویهٔ بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ $\qquad \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

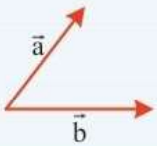
نکته ۲:

اندازهٔ ضرب خارجی: برای ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضای $\mathbb{R}^3$ داریم:

θ: زاویهٔ بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ $\qquad |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

نکته ۳:

مساحت مثلثی که توسط ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضا ساخته می‌شود برابر است با:



$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

با استفاده از اطلاعات سوال، $\vec{a}.\vec{b}=\frac{-3}{5}|\vec{a}||\vec{b}|$ است و می‌دانیم مساحت مثلثی که روی بردارهای داده شده ساخته می‌شود برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\left|(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})\times(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{0}-\frac{6\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}+\frac{\overbrace{-2\vec{a}\times\vec{b}}}{2\vec{b}\times\vec{a}}-\vec{0}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{-8(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right|$$

$$\xrightarrow[\cos\theta=\frac{-3}{5}\Rightarrow\sin\theta=\frac{4}{5}]{\vec{a}.\vec{b}=\frac{-3}{5}|\vec{a}||\vec{b}|\\ |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\frac{-3}{5}|\vec{a}||\vec{b}|}\frac{4|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}{|\vec{a}||\vec{b}|}=4(\frac{4}{5})=\frac{16}{5}=3/2$$

---

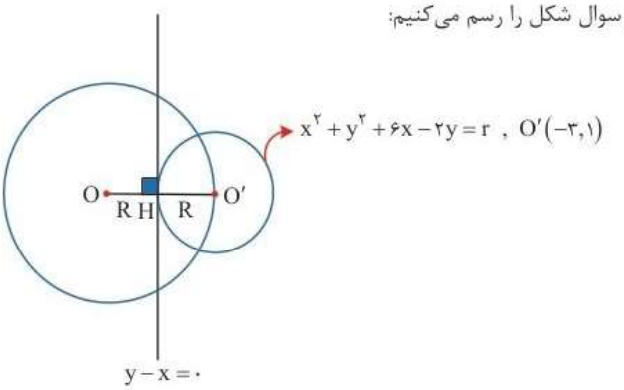
۳۶ ۱

در معادلهٔ گسترده دایره به فرمول $x^2+y^2+ax+by+c=0$ داریم:

مرکز دایره: $\begin{cases}x=-\frac{a}{2}\\ y=-\frac{b}{2}\end{cases}$ شعاع دایره $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

پاسخ تشریحی:

برای درک بهتر سوال شکل را رسم می‌کنیم:



$$R=|O'H|=\frac{|1-(-3)|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ شعاع دایره بزرگ : $2R=4\sqrt{2}$

معادله خط OO' را می‌نویسیم:

$$m_{OO'}=\frac{-1}{\underbrace{y-x=0}_{\text{شیب}}}=-1$$

$O'(-3,1)$

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-1=-1(x+3)\Rightarrow y-1=-x-3\Rightarrow y=-x-2$$

این خط و $y-x=0$ را تقاطع می‌دهیم و نقطه H به دست می‌آید:

$$\begin{cases}y-x=0\\ y+x=-2\end{cases}$$

$$\overline{2y=-2\Rightarrow y=-1}\qquad\Rightarrow H(-1,-1)$$
$$-1-x=0\Rightarrow x=-1$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

حال، با توجه به اینکه H وسط نقطه O و O' است، O به دست می‌آید:

$$\frac{O+O'}{2}=H \Rightarrow O=2H-O'=(-2,-2)-(-3,1)=(1,-3)$$

معادله دایره بزرگ: $(x-1)^2+(y+3)^2=32$

معادله دایره کوچک: $(x+3)^2+(y-1)^2=8$

دو معادله را تقاطع می‌دهیم ←

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+6y-22=0 \\ x^2+y^2+6x-2y+2=0 \end{cases}$$

$$8x-8y+24=0$$

$$x-y=-3 \Rightarrow y=x+3$$

در دایره بزرگ (فرقی ندارد در کدام دایره) جایگزین می‌کنیم:

$$(x-1)^2+(x+3+3)^2=32$$

$$2x^2+10x+5=0 \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب طول نقاط برخورد } P=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$$

---

۳۷ ۲

نکته ۱:

عاد کردن: عدد صحیح a که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است، یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است. هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به طوری که $b=aq$.

نکته ۲:

اعداد اول فقط دارای ۲ شمارندهٔ طبیعی هستند، ۱ و خودش.

پاسخ تشریحی:

چون که عدد $\overline{(a.a)}\times 3$ سه رقمی است، پس a فقط می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ باشد. بنابراین داریم:

$a=1 \Rightarrow$ هیچ عدد اولی آن را نمی‌شمارد.

$a=2 \Rightarrow$ فقط یک عدد اول آن را می‌شمارد. $(p=2)$

$a=3 \Rightarrow$ فقط یک عدد اول آن را می‌شمارد. $(p=3)$

پس حداکثر یک عدد اول، a را می‌شمارد و جواب گزینهٔ ۲ است.

---

۳۸ ۳

نکته ۱:

شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد، آن است که: $(a,b)|c$.

نکته ۲:

تبدیل معادله سیاله به یک معادلهٔ هم‌نهشتی:

$$ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} |b| \\ ax \equiv c \end{cases} \quad \begin{cases} |a| \\ by \equiv c \end{cases}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

نکته ۳:

ویژگی‌های هم‌نهشتی:

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۳) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

۴) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \end{cases}$

۵) $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

۷) $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

پاسخ تشریحی:

$$۶۳x+۷۷y=۲۷۳ \xrightarrow{\div ۷} ۹x+۱۱y=۳۹$$

$$۹x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۹ \Rightarrow -۲x \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \xrightarrow[(-۲,۱۱)=۱]{\div(-۲)} x \overset{۱۱}{\equiv} -۳ \Rightarrow x=۱۱k-۳ \xrightarrow{k=۱۰} x_{min}=۱۰۷$$

مجموع ارقام : $۱+۰+۷=۸$

۳۹ ۲

اصل لانهٔ کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m>n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت، لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

تعمیم اصل لانهٔ کبوتری: هرگاه $(kn+۱)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت، لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+۱)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

پاسخ تشریحی:

به جای این‌که به همه اعداد طبیعی توجه کنیم، کافی است که به باقیمانده آن اعداد نسبت به ۵ توجه داشته باشیم. می‌دانیم که باقیمانده هر عددی نسبت به ۵، دارای ۵ حالت است $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ و برای این‌که مجموع دو عدد مضربی از ۵ باشد باید مجموع باقیمانده‌های آن دو عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد پس باید زوج مرتب‌ها را براساس باقیمانده آن عدد نسبت به ۵ نوشته و بررسی کنیم:

دسته اول: در زوج مرتب‌های $(۱,۰)$، $(۱,۱)$، $(۱,۲)$، $(۱,۳)$ و $(۱,۴)$، هر دو زوج مرتبی که انتخاب کنیم. مجموع مؤلفه‌های اول و مجموع مؤلفه‌های دوم بر ۵ بخش‌پذیر نمی‌باشد. (۵ زوج مرتب)

دسته دوم: در زوج مرتب‌های $(۲,۰)$، $(۲,۱)$، $(۲,۲)$، $(۲,۳)$ و $(۲,۴)$ نیز هیچ دو زوج مرتبی را نمی‌توان پیدا کرد که ویژگی خواسته شده را داشته باشند و از طرفی هیچ‌یک از زوج مرتب‌های این دسته نیز نمی‌توانند با زوج مرتب‌های دسته اول ویژگی خواسته شده را برآورده کنند. (۵ زوج مرتب)

دسته سوم: در نهایت زوج مرتب‌های $(۰,۱)$، $(۰,۲)$، $(۰,۰)$ را نیز می‌توانیم در نظر بگیریم. (۳ زوج مرتب)

بنابراین طبق اصل لانه کبوتری اگر یک زوج به زوج مرتب‌های دسته‌های اول تا سوم اضافه کنیم می‌توانیم بگوییم که حداقل دو زوج مرتب وجود دارند که مجموع مؤلفه‌های اول و مجموع مؤلفه‌های دوم آن‌ها مضربی از ۵ است. پس:

$$m>n \Rightarrow m_{min}=(۵+۵+۳)+۱=۱۴$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۴۰ ۴

نکته ۱:

مکمل یک گراف: مکمل گراف G، گرافی است که با $\bar{G}$ یا G^c نشان می‌دهیم و مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس G است. بین دو رأس از $\bar{G}$ یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی نباشد.

نکته ۲:

اگر گراف G دارای P رأس باشد، داریم:

۱) $q(G)+q(\bar{G})=\binom{P}{۲} \Rightarrow$ اندازهٔ یک گراف کامل با P رأس

۲) $\delta(G)+\Delta(\bar{G})=P-۱$

۳) $\Delta(G)+\delta(\bar{G})=P-۱$ $\Rightarrow$ درجهٔ رأس‌های یک گراف کامل با P رأس

پاسخ تشریحی:

سوال دو جواب دارد. زیرا:

۱) $۱\times۲\times۲\times۲\times۲\times۳=۴۸$

$$\begin{cases}p=۶\\ ۲q=۱۲\Rightarrow q=۶\end{cases}$$

$$\delta(G)=۱\Rightarrow\Delta(\bar{G})=۴$$

$$q(\bar{G})=\binom{۶}{۲}-۶=۱۵-۶=۹$$

$$\Delta(\bar{G})+q(\bar{G})=۴+۹=۱۳$$

۲) اگر $۱\times۲\times۲\times۴\times۳=۴۸$

$$\begin{cases}p=۵\\ ۲q=۱۲\Rightarrow q=۶\end{cases}$$

$$\delta(G)=۱\Rightarrow\Delta(\bar{G})=۳$$

$$q(\bar{G})=\binom{۵}{۲}-۶=۴$$

$$\Delta(\bar{G})+q(\bar{G})=۳+۴=۷$$

که حالت اول در گزینه‌ها است.

www.biomaze.ir

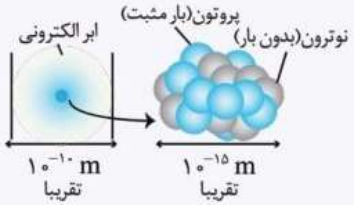
t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۴۱ ۲

تابش، اتم و ایزوتوپ

در مرکز اتم قسمتی کوچک و بسیار چگال به نام هستهٔ اتم وجود دارد. در مورد هسته نکات زیر را به خاطر داشته باشید:

۱) ابعاد اتم در حدود $10^{-10}\,m$ و ابعاد هستهٔ اتم در حدود $10^{-15}\,m$ است. بنابراین می‌توانیم بگوییم، شعاع هسته $\frac{1}{100000}$ شعاع اتم است. به شکل زیر دقت کنید.



۲) هستهٔ اتم از نوترون‌ها و پروتون‌ها تشکیل شده است که به‌طور کلی نوکلئون نامیده می‌شوند.

۳) بار الکتریکی پروتون مثبت بوده و اندازهٔ آن برابر با بار الکتریکی الکترون است. اما جرم پروتون تقریباً ۱۸۳۷ برابر جرم الکترون می‌باشد.

۴) نوترون بار الکتریکی ندارد و جرمش اندکی بیشتر از جرم پروتون است. نوترون توسط چادویک کشف شد.

شیوه نمایش هسته اتم: برای یک عنصر با نماد شیمیایی X، نماد هسته به صورت زیر نشان داده می‌شود:

N: تعداد نوترون‌ها (عدد نوترونی)

$^{\text{عدد جرمی}\rightarrow A}_{\text{عدد اتمی}\rightarrow Z}X_{N\leftarrow\text{عدد نوترونی}}$ X: نماد عنصر

A ← عدد جرمی (مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها)

Z ← عدد اتمی (تعداد پروتون‌ها)

N ← عدد نوترونی (تعداد نوترون‌ها)

عدد جرمی نیز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A = Z + N$$

A: مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها (عدد جرمی) Z: تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی)

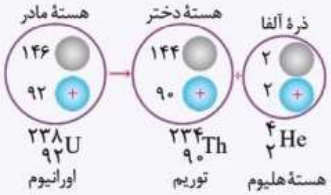
واپاشی α

۱) این واپاشی در هسته‌های سنگین روی می‌دهد.

۲) پرتوهای α ذرات باردار مثبت از جنس هستهٔ اتم هلیم (^4_2He) هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند.

۳) برد پرتوهای α کوتاه است. این ذرات پس از طی مسافتی کوتاه در حدود ۱cm تا ۲cm در هوا یا هنگام عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شوند. پرتوهای α کمترین نفوذ را دارند و با ورقهٔ نازک سربی با ضخامت ناچیز (۰/۰۱mm) متوقف می‌شوند.

۴) اگر ذره‌های α از راه تنفس یا دستگاه گوارش وارد بدن شوند، باعث آسیب‌های شدید به بدن خواهند شد. به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است توجه کنید:



$$^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2He \qquad (\text{واپاشی } \alpha)$$

واپاشی β^-

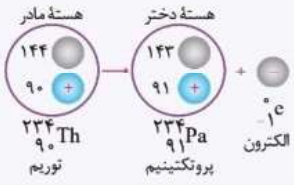
۱) این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها است.

۲) پرتوهای β^- در واقع همان الکترون‌ها هستند.

۳) پرتوهای β^- مسافت بیشتری را نسبت به پرتوهای α در سرب نفوذ می‌کنند. تقریباً پرتوهای β^- می‌توانند مسافتی در حدود ۰/۱mm در سرب نفوذ کنند.

۴) الکترون گسیل‌شده در این واپاشی یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست؛ این الکترون وقتی به‌وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به پروتون و الکترون تبدیل شود.

به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده توجه کنید:



$$^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + {}^0_{-1}e^- \qquad (\text{واپاشی } \beta^-)$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

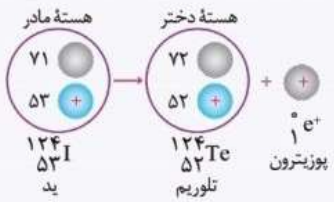
واپاشی β^+

۱) در این واپاشی ذرهٔ گسیل شده توسط هسته، جرم یکسانی با الکترون دارد ولی به جای بار e- دارای بار الکتریکی e+ است. به این الکترون مثبت، پوزیترون می‌گویند و با نماد β^+ یا e^+ نمایش داده می‌شود.

۲) مسافتی که پرتوهای β^+ در سرب نفوذ می‌کنند، مانند β^- در حدود $0/1mm$ است.

۳) هنگام واپاشی β^+ یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است توجه کنید:



$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{1}e^+ \qquad (\beta^+ \text{ واپاشی})$$

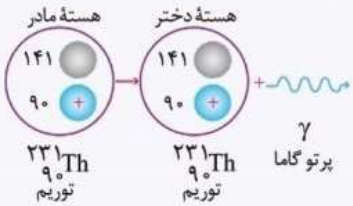
واپاشی γ

۱) اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتوی گاما به حالت پایه می‌رسند.

۲) پرتوهای گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و دارای بار الکتریکی و جرم نمی‌باشند و از فوتون‌های پرانرژی تشکیل شده‌اند.

۳) پرتوهای گاما بیشترین نفوذ را دارند و می‌توانند از ورقهٔ سربی با ضخامتی در حدود $100mm$ عبور کنند.

به معادلهٔ این واپاشی و مثالی که مطرح شده است، توجه کنید:



$$^{A}_{Z}X^* \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma \text{ پ} \qquad (\gamma \text{ واپاشی})$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به معادلهٔ واپاشی و پایستگی عدد اتمی و عدد جرمی می‌توان نوشت:

$$^{11}_{6}C \rightarrow {}^{11}_{5}B + {}^{A}_{Z}x$$

پایستگی عدد اتمی: $6 = 5 + Z \Rightarrow Z = +1$

پایستگی عدد جرمی: $11 = 11 + A \Rightarrow A = 0$

بنابراین x به‌صورت $^{0}_{+1}x$ است که مطابق درسنامه بالا همان ذرهٔ β^+ می‌باشد.

۴۲ ۳

انرژی پتانسیل گرانشی

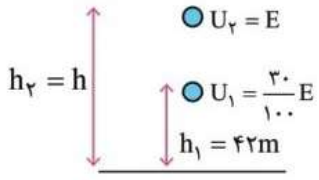
انرژی پتانسیل گرانشی جسمی به جرم m را با U_g نمایش می‌دهیم و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$U_g = mgh$$

در این رابطه، h ارتفاع عمودی نسبت به مبدأ پتانسیل گرانشی است. مبدأ پتانسیل گرانشی، سطحی است که به‌طور قراردادی مشخص می‌شود و انرژی پتانسیل گرانشی در آن صفر در نظر گرفته می‌شود.

زمانی که مبدأ پتانسیل گرانشی مشخص شد، نقاط بالای آن دارای انرژی پتانسیل گرانشی مثبت $(U_g > 0)$ و نقاط زیر آن دارای انرژی پتانسیل گرانشی منفی $(U_g < 0)$ خواهند شد.

در ارتفاع ۴۲ متری، ۳۰ درصد انرژی جنبشی کاهش می‌یابد و به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل می‌شود و در بالاترین نقطهٔ مسیر، همهٔ انرژی مکانیکی جسم به‌صورت انرژی پتانسیل گرانشی است، بنابراین داریم:



$$U = mgh \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{\frac{30}{100}E} = \frac{h}{42} \Rightarrow h = 140m$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۴۳ ۲

انبساط طولی

اگر دمای یک میله را مقداری افزایش دهیم، افزایش طول میله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta L = \alpha L_1 \Delta T$$

برای یافتن درصد تغییرات طول، می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده نمود:

$$\text{درصد تغییرات طول} = \frac{\Delta L}{L_1} \times ۱۰۰ = \alpha \Delta T \times ۱۰۰$$

در هر دو رابطه، اگر ΔT برحسب $^\circ C$ یا K وارد شود، یکای α برحسب $\frac{۱}{^\circ C}$ یا $\frac{۱}{K}$ به‌دست می‌آید. اما اگر ΔT برحسب $^\circ F$ وارد گردد مقدار α برحسب $\frac{۱}{^\circ F}$ به‌دست خواهد آمد.

پاسخ تشریحی:

اگر اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین دما برابر $\Delta\theta$ باشد، داریم:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = ۹۰۰/۹ - ۹۰۰ = ۰/۹ m$$

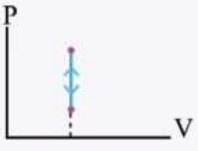
$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta\theta \Rightarrow ۰/۹ = ۹۰۰ \times ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۵} \times \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = ۸۰ ^\circ C$$

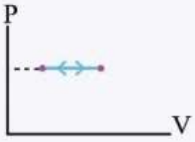
۴۴ ۱

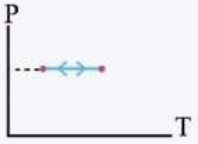
فرآیندها

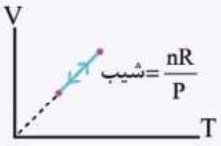
در فرآیند هم‌حجم:
۱) حجم گاز ثابت می‌ماند
۲) $W = ۰$
۳) $\Delta U = Q$



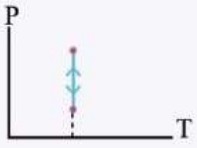
در فرآیند هم‌فشار:
۱) فشار گاز ثابت می‌ماند
۲) $\Delta U = Q + W$

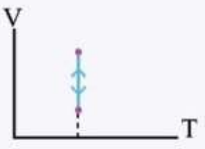


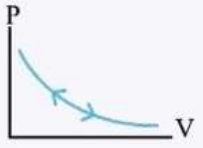




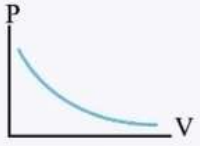
در فرآیند هم‌دما:
۱) دمای گاز ثابت می‌ماند
۲) $\Delta U = ۰$
۳) $Q = -W$







در فرآیند بی‌دررو:
۱) $Q = ۰$
۲) $\Delta U = W$



☑ طبق قانون اول ترمودینامیک تغییر انرژی درونی گاز در یک فرآیند با مجموع کار و گرمای مبادله‌شده بین گاز و محیط در آن فرآیند برابر است:

$$\Delta U = Q + W$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

برای پاسخ دادن به این سؤال به نکات زیر توجه کنید:

۱) برای آن‌که کار انجام شده روی گاز مثبت باشد، باید گاز را متراکم کنیم. (رد گزینه‌های (۳) و (۴))

۲) در تراکم هم‌فشار، دمای گاز کاهش می‌یابد و در نتیجه انرژی درونی آن نیز کاهش می‌یابد، در حالی که در تراکم بی‌دررو، دما و انرژی درونی گاز افزایش می‌یابد، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

---

۴۵ ۲

معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای که مکان متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

x : مکان متحرک در لحظهٔ t — a: شتاب ثابت متحرک

v_0 : سرعت اولیه — x_0 : مکان اولیه

در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک تابعی درجه دوم از زمان است.

پاسخ تشریحی:

جابه‌جایی متحرک A در ۶ ثانیه، با جابه‌جایی متحرک B در مدت ۴ ثانیه $(2s < t < 6s)$ برابر است، بنابراین می‌توان گفت:

$$0 < t < 6s \text{ در } A \text{ جابه‌جایی}: \Delta x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 = \frac{1}{2}a \times 6^2 = 18a$$

$$2s < t < 6s \text{ در } B \text{ جابه‌جایی}: \Delta x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 = \frac{1}{2}(a + 0/5) \times 4^2 = 8a + 4$$

$$\xrightarrow{\Delta x_A = \Delta x_B} 18a = 8a + 4 \Rightarrow a = 0/4 \frac{m}{s^2}$$

در ادامه، جابه‌جایی دو متحرک را تا لحظهٔ $t = 10s$ پیدا می‌کنیم. دقت کنید که تا لحظهٔ $t = 10s$، متحرک A به مدت $10s$ و متحرک B به مدت $8s$ حرکت کرده‌اند و داریم:

$$\Delta x_A = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 0/4 \times 10^2 = 20m$$

$$\Delta x_B = \frac{1}{2}(a + 0/5)t^2 = \frac{1}{2} \times 0/9 \times 8^2 = 28/8m$$

بنابراین فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = 10s$ برابر $28/8 - 20 = 8/8m$ است.

---

۴۶ ۴

سقوط آزاد:

به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند در صورتی که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد گویند.

برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد نقطهٔ رها شدن جسم را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم $(y_0 = 0)$

و جهت مثبت محور y را به سمت پایین انتخاب می‌کنیم:

در این صورت علامت شتاب و مکان و سرعت در هر لحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد در صورت رها شدن جسم بدون سرعت اولیه به‌صورت زیر است:

۱) معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \xrightarrow[v_0 = 0]{y_0 = 0} y = \frac{1}{2}gt^2$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۲) معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v = gt + v_0 \xrightarrow{v_0 = 0} v = gt$$

۳) معادلهٔ مستقل از زمان:

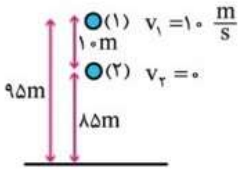
$$v_2^2 - v_1^2 = 2g\Delta y$$

پاسخ تشریحی:

در یک ثانیهٔ اول که هنوز گلولهٔ دوم را رها نکرده‌ایم، گلولهٔ اول به اندازهٔ $\frac{1}{2}g = 5m$ پایین می‌آید و به ارتفاع ۹۵ متری می‌رسد.

در این لحظه گلولهٔ دوم را از ۱۰ متر پایین‌تر از گلولهٔ اول رها می‌کنیم.

به شکل مقابل توجه کنید:



با توجه به این‌که سرعت گلولهٔ (۱) بیش‌تر از گلولهٔ (۲) است و شتاب آن‌ها یکسان می‌باشد، ابتدا گلولهٔ (۱) به گلولهٔ (۲) نزدیک می‌شود و پس از عبور آن از گلولهٔ (۲)، فاصلهٔ آن‌ها شروع به افزایش می‌کند.

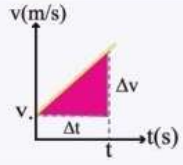
---

۴۷ ۲

شیب نمودار سرعت ـ زمان:

شیب نمودار سرعت ـ زمان ثابت است و برابر با شتاب متحرک می‌باشد.

$$\text{شیب نمودار سرعت ـ زمان} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان:

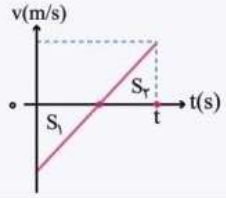
مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان برابر جابجایی (Δx) می‌باشد.

اگر همه مساحت‌ها را با علامت مثبت جمع کنیم مسافت طی شده (L) به‌دست می‌آید.

دقت کنید که مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان جابه‌جایی (Δx) است نه مکان (x).

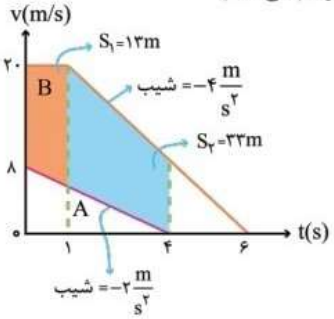
$$\Delta x = -S_1 + S_2$$

$$L = S_1 + S_2$$



پاسخ تشریحی:

لحظه‌ای که فاصلهٔ دو متحرک به $46m$ می‌رسد را لحظهٔ $t = 0$ در نظر می‌گیریم و نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم.



برای آن‌که دو متحرک به هم برسند، B باید $46m$ فاصله را جبران کند، یعنی مساحت زیر نمودار سرعت – زمان B باید $46m$ بیش‌تر از A باشد. با توجه به نمودار، $S_1 + S_2 = 46m$ است، یعنی در لحظهٔ $t = 4s$، دو متحرک به هم می‌رسند و سرعت B در این لحظه برابر است با:

$$v_B = 20 - 3 \times 4 = 20 - 12 = 8\frac{m}{s}$$

---

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۴۸ ۳

پاسخ تشریحی:

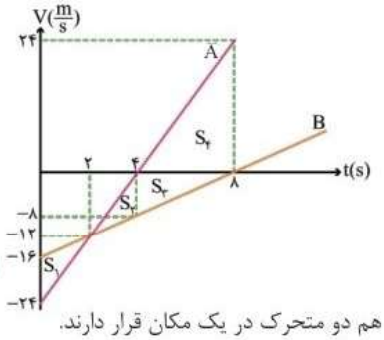
گام اول: معادلهٔ سرعت ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$\text{B شیب} = a_B = \frac{۱۶}{۸} = ۲\frac{m}{s^۲} \Rightarrow v_B = ۲t - ۱۶$$

بنابراین در لحظهٔ $t = ۲s$ که سرعت دو متحرک برابر می‌شود، سرعت آن‌ها برابر $v = ۲\times۲ - ۱۶ = -۱۲\frac{m}{s}$ است و معادلهٔ سرعت – زمان A برابر می‌شود با:

$$\text{A شیب} = a_A = \frac{-۱۲-(-۲۴)}{۲} = ۶\frac{m}{s^۲} \Rightarrow v_A = ۶t - ۲۴$$

بنابراین نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک به‌صورت زیر تکمیل می‌شود:



با توجه به این‌که دو متحرک از یک مکان شروع به حرکت کرده‌اند و $S_۱ = S_۲$ است، در لحظهٔ $t = ۴s$ هم دو متحرک در یک مکان قرار دارند. بازه‌ای که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، بازهٔ $۴s < t < ۸s$ است که علامت سرعت آن‌ها مخالف هم می‌باشد. در این بازه، متحرک A به اندازهٔ $|S_۴|$ در جهت محور x حرکت می‌کند و متحرک B به اندازهٔ $|S_۳|$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، پس فاصلهٔ آن‌ها به اندازهٔ $|S_۳|+|S_۴|$ افزایش می‌یابد.

$$\text{افزایش فاصله}: |S_۳|+|S_۴| = \frac{۸\times۴}{۲} + \frac{۲۴\times۴}{۲} = ۱۶ + ۴۸ = ۶۴\,m$$

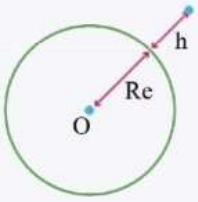
۴۹ ۲

شتاب گرانشی:

شتاب گرانشی زمین در نقطه‌ای که به فاصلهٔ h از سطح زمین قرار دارد، برابر است با:

$$g = \frac{GM_e}{r_e^۲} = \frac{GM_e}{(R_e + h)^۲}$$

در رابطهٔ بالا M_e جرم زمین و R_e شعاع زمین است.



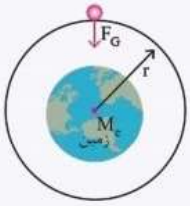
با توجه به رابطهٔ بالا، شتاب گرانشی در سطح زمین از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$g_. = \frac{GM_e}{R_e^۲} \approx ۹/۸\frac{m}{s^۲}$$

چرخش ماهواره به دور زمین:

حرکت ماهواره‌ها به دور زمین، حرکت دایره‌ای یکنواخت است و نیروی وزن ماهواره در ارتفاعی که در آن به دور زمین گردش می‌کند، نقش نیروی مرکزگرا را ایفاء می‌کند:

$$F_c = W_{\text{ماهواره}} = mg$$



www.biomaze.ir

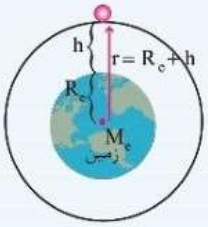
t.me/Azmoonha_Azmayeshi

- با استفاده از نیروی مرکزگرا $(F_C = \frac{mv^2}{r})$ و رابطهٔ تندی چرخش در حرکت دایره‌ای یکنواخت $(v = \frac{2\pi r}{T})$، می‌توان تندی و دورهٔ چرخش ماهواره را به‌دست آورد:

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \rightarrow v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_e}} \rightarrow T \propto \sqrt{r^3} \Rightarrow T^2 \propto r^3$$

توجه کنید که در روابط بالا شعاع مدار فاصله از مرکز زمین است. اگر ارتفاع از سطح زمین داده شود، برای تعیین شعاع باید شعاع کرهٔ زمین را با ارتفاع داده شده جمع کرد.



بررسی موارد:

با توجه به نکات بالا، عبارت صحیح برای هریک از گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

۱) تندی مداری ماهواره با جذر فاصلهٔ آن از مرکز زمین رابطهٔ عکس دارد. (✗)

۲) مربع دورهٔ گردش با مکعب فاصله متناسب است. (✓)

۳) شتاب حرکت ماهواره با مربع فاصله رابطهٔ عکس دارد. (✗)

۴) وزن ماهواره با مربع فاصله از مرکز زمین رابطهٔ عکس دارد. (✗)

۵۰ | ۱

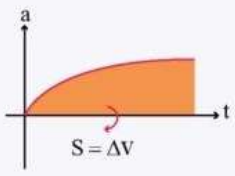
تکانه و نیروی متوسط

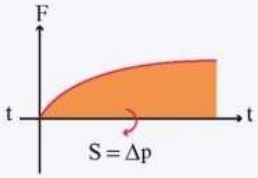
تکانه: یک کمیت برداری است و برابر با حاصل‌ضرب جرم در سرعت است، تکانه قدرت جسم برای ضربه زدن را بیان می‌کند. $\vec{p} = m\vec{v}$

هر چقدر تکانهٔ یک جسم بیشتر باشد، متوقف کردن آن جسم سخت‌تر است.

مقایسهٔ رابطهٔ تکانه و قانون دوم نیوتون: از مقایسه دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت که هر رابطه‌ای که در فصل حرکت بین سرعت و شتاب برقرار باشد، همان رابطه بین تکانه و نیرو در فصل دینامیک نیز برقرار است.

حرکت	دینامیک
$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$





تغییرات تکانه برابر با سطح زیر نمودار نیرو ـ زمان است.

$$\vec{F}.\Delta t = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

طبق قانون دوم نیوتون برحسب تکانه داریم:

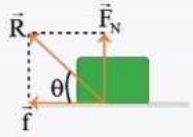
$$\vec{F}_{av}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{\vec{p}_{۲}-\vec{p}_{۱}}{۳-۱}=\frac{(۳\times۳-۶)\vec{i}-(۳\times۱-۶)\vec{i}}{۲}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{av}=\frac{۳\vec{i}-(-۳\vec{i})}{۲}=۳\vec{i}\ \ (\text{در SI})$$

۵۱ ۳

نیروی تکیه‌گاه:

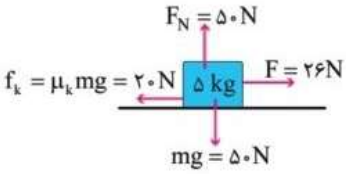
سطح یا تکیه‌گاهی که جسم روی آن ساکن یا در حال حرکت است، دو نیرو به جسم وارد می‌کند: نیروی عمودی سطح $\vec{F}_N$ و نیروی اصطکاک f، به برآیند این دو نیرو، نیروی سطح یا تکیه‌گاه می‌گویند و آن را با نماد $\vec{R}$ نشان می‌دهند؛ چون این دو نیرو همواره بر هم عمودند، داریم:



$$R=\sqrt{F_N^{۲}+f^{۲}}$$

پاسخ تشریحی:

نیروی $F=۲۶\,N$ از $f_{s_{max}}=\mu_s mg=۰/۵\times۵۰=۲۵\,N$ بزرگ‌تر است، پس جسم روی سطح حرکت می‌کند.



$$F_{net}=ma\Rightarrow ۲۶-۲۰=۵a\Rightarrow a=۱/۲\frac{m}{s^{۲}}$$

$$\text{نیروی سطح: } R=\sqrt{(f_k)^{۲}+F_N{}^{۲}}=\sqrt{۲۰^{۲}+۵۰^{۲}}=۱۰\sqrt{۲۹}\,N$$

۵۲ ۲

نیروی مرکزگرا

هرگاه خودرویی مسیر دایره‌ای یک میدان مسابقه افقی و یا یک پیچ جادهٔ افقی را با تندی ثابت بپیماید، نیروی اصطکاک ایستایی بین لاستیک اتومبیل و مسیر که امتداد آن در راستای شعاع میدان مسابقه و جهت آن به سمت مرکز است، نقش نیروی مرکزگرا برای خودرو ایفا می‌کند:

$$F_c=f_s\rightarrow\frac{mv^{۲}}{r}=f_s$$

دقت کنید که بیشینهٔ تندی که خودرو می‌تواند با آن پیچ را بپیماید ربطی به جرم خودرو ندارد.

پاسخ تشریحی:

در حرکت دایره‌ای خودرو در پیچ، نیروی اصطکاک ایستایی در نقش نیروی مرکزگراست و اندازهٔ آن برابر است با:

$$v=۱۸\frac{km}{h}=۵\frac{m}{s}\qquad m=۲\,ton=۲۰۰۰\,kg$$

$$F_c=m\frac{v^{۲}}{R}=۲۰۰۰\times\frac{۵^{۲}}{۲۰}=۲۵۰۰\,N$$

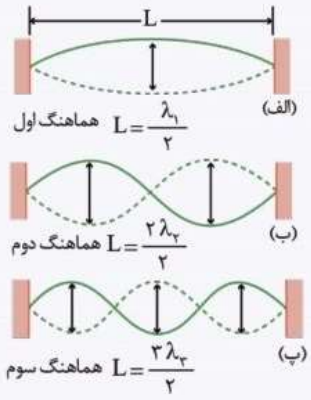
www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۵۳ | ۳

موج ایستاده:

یک ریسمان (تار) را در نظر بگیرید که دو سر آن محکم به نقاط ثابتی بسته شده است. هنگامی که موجی در این تار ایجاد شود، به دلیل تداخل موج اصلی با موج بازتاب، درون تار موج ایستاده ایجاد می‌شود. شکل زیر سه هماهنگ اول را در یک تار نشان می‌دهد.



در مورد موج ایستاده در تار دو سر بسته به نکات زیر توجه کنید:

۱) طول تار مضرب صحیحی از نصف طول موج است.

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}$$

در رابطهٔ بالا، n شمارهٔ هماهنگ است.

۲) بسامد هماهنگ n ام تار برابر است با:

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

تندی انتشار موج در تار: v طول تار: L بسامد هماهنگ n ام: f_n

پاسخ تشریحی:

هنگامی که ۳ شکم در طول تار ایجاد می‌شود، هماهنگ سوم نواخته شده است بنابراین داریم:

$$f_n = nf_1 \Rightarrow f_3 = 3f_1 \Rightarrow 300 = 3f_1 \Rightarrow f_1 = 100\,Hz$$

$$f_1 = \frac{v}{2L} \Rightarrow 100 = \frac{v}{2\times 0/6} \Rightarrow v = 120\frac{m}{s}$$

۵۴ | ۴

امواج صوتی

۱) برای محاسبهٔ شدت صوت از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$I = \frac{E}{A\cdot t}$$

در رابطهٔ فوق، E انرژی صوتی، t زمان و A مساحتی است که انرژی در آن پخش می‌شود.

۲) باتوجه به این‌که $\frac{E}{t}$ همان توان صوتی منبع صوت است، می‌توان نوشت:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

۳) برای محاسبهٔ تراز شدت صوت داریم:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0}$$

برحسب دسی‌بل

در رابطهٔ فوق I_0 شدت صوت مبنا است.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۴) برای مقایسهٔ تراز شدت دو صوت، داریم:

$$\begin{cases}\beta_1 = 10\log\frac{I_1}{I_0}\\ \beta_2 = 10\log\frac{I_2}{I_0}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\beta_2-\beta_1 = 10\log\frac{I_2}{I_1}}$$

۵) شدت یک صوت به بسامد منبع صوت، دامنهٔ صوت و همین‌طور فاصلهٔ شنونده از منبع بستگی دارد.

$$I \propto \frac{A^2f^2}{r^2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

با کمک رابطهٔ فوق می‌توانیم شدت دو صوت را مقایسه کنیم.

پاسخ تشریحی:

گام اول: ابتدا محاسبه می‌کنیم که شدت صوت چند برابر شده است:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{P_2}{P_1}\times\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2\times 2^2 = 8$$

گام دوم: در ادامه تغییرات تراز شدت صوت را به‌دست می‌آوریم:

$$\beta_2-\beta_1 = 10\log\frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \beta_2-\beta_1 = 10\log 8 = 10\times 3\log 2$$

$$\Rightarrow \beta_2-\beta_1 = 9\,dB$$

تراز شدت صوت $9dB$ افزایش می‌یابد.

۵۵ ۳

آونگ

۱) دورهٔ تناوب یک آونگ ساده به طول L برابر است با:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

۲) برای مقایسهٔ دورهٔ تناوب دو آونگ ساده داریم:

$$T \propto \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}\times\frac{g_1}{g_2}}$$

۳) گاهی سؤالات آونگ با سؤالات گرانش ترکیب می‌شوند. در این صورت باید شتاب گرانش را خودمان محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} g = G\frac{M}{r^2}\\ T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\end{cases} \rightarrow T = 2\pi r\sqrt{\frac{L}{GM}}$$

در رابطهٔ فوق، r فاصله از مرکز سیاره و M جرم سیاره است.

پاسخ تشریحی:

برای مقایسهٔ دورهٔ تناوب در دو حالت می‌توان نوشت:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$\xrightarrow[L_2 = L_1 + 17\,cm]{T_2 = T_1 + \frac{12/5}{100}T_1 = \frac{9}{8}T_1} \frac{9}{8} = \sqrt{\frac{L_1+17}{L_1}}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

$$\Rightarrow \frac{۸۱}{۶۴}=\frac{L_۱+۱۷}{L_۱} \Rightarrow L_۱=۶۴\,cm=۰/۶۴\,m$$

بنابراین دورهٔ تناوب اولیهٔ آونگ برابر است با:

$$T_۱=۲\pi\sqrt{\frac{L_۱}{g}}=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۶۴}{\pi^۲}}=۲\pi\times\frac{۰/۸}{\pi}=۱/۶\,s$$

---

۵۶ ۱

پاسخ تشریحی:

گام اول: دورهٔ تناوب نوسان برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{\omega}=\frac{۲\pi}{۵۰\pi}=۰/۰۴\,s$$

گام دوم: طول بازهٔ زمانی $t_۱=۰$ تا $t_۲=۰/۰۲\,s$ برابر نصف دوره است و نوسانگر در این مدت مسافتی به اندازهٔ $۲A$ طی می‌کند.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow ۱/۵=\frac{۲A}{۰/۰۲} \Rightarrow A=۰/۰۱۵\,m=۱/۵\,cm$$

---

۵۷ ۴

پاسخ تشریحی:

بسامد اصلی تار برابر است با:

$$f=\frac{v}{۲L}=\frac{۲۵۰}{۲\times۰/۵}=۲۵۰\,Hz$$

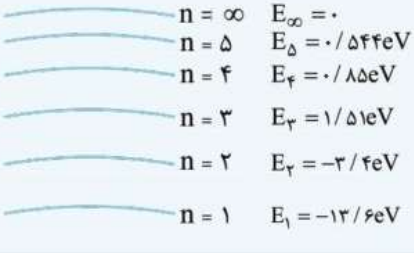
بنابراین مدت زمانی که طول می‌کشد تا هر ذرهٔ تار، یک نوسان کامل انجام دهد، یعنی دورهٔ تناوب برابر است با:

$$T=\frac{۱}{f}=\frac{۱}{۲۵۰}=۰/۰۰۴\,s=۴\,ms$$

---

۵۸ ۱

با توجه به مدل بور انرژی الکترون در لایه‌های مختلف اتم هیدروژن به‌صورت شکل زیر است. همان‌طور که می‌بینید با افزایش n فاصلهٔ انرژی لایه‌ها کاهش می‌یابد.



طبق مدل بور انرژی الکترون در مدارهای اتم هیدروژن به کمک رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

(ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن) $E_n=\frac{-E_R}{n^۲}$

E_n ← انرژی الکترون در هر لایه از اتم هیدروژن برحسب ژول یا الکترون‌ولت

E_R ← اندازهٔ انرژی الکترون در اولین مدار اتم هیدروژن $(E_R=۱۳/۶\,eV)$

n ← شمارهٔ مداری که الکترون روی آن قرار دارد.

پاسخ تشریحی:

در نکتهٔ فوق، انرژی الکترون در مدارهای مختلف اتم هیدروژن مشخص شده‌اند. همان‌طور که می‌بینید، اختلاف انرژی مدارهای یک و چهار برابر $۱۲/۷۵\,eV$ است، بنابراین $n'=۱$ و $n=۴$ است.

---

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۵۹ ۲

تابع کار

کمینه انرژی لازم برای جدا شدن الکترون از سطح فلز را تابع کار فلز گویند و آن را با حرف W_0 نمایش می‌دهند.

مجدداً تعریف‌ها را مرور کنید. باتوجه به این تعاریف اگر انرژی فوتون فرودی بر فلز با تابع کار فلز برابر باشد الکترون در آستانهٔ جدایی از سطح فلز قرار می‌گیرد.

$$W_0 = hf_0$$

اگر انرژی فوتون فرودی بر فلز از تابع کار فلز بیش‌تر باشد $(hf > W_0)$ الکترون از فلز جدا شده و الکترون دارای مقداری انرژی جنبشی می‌شود. W_0 کم‌ترین انرژی لازم برای جدا شدن الکترون است. بنابراین الکترونی که انرژی جدا شدن آن W_0 است، بیش‌ترین انرژی جنبشی را به‌دست می‌آورد.

$$K_{max} = hf - W_0$$

پاسخ تشریحی:

فرض کنیم طول موج اولیهٔ نور λ_1 بوده است و با نصف کردن آن در آزمایش دوم، طول موج به $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$ رسیده است. در این‌صورت می‌توان نوشت:

$$K_{max_1} = \frac{hc}{\lambda_1} - W = \frac{1200}{\lambda_1} - 4$$

$$K_{max_2} = \frac{hc}{\lambda_2} - W = \frac{1200}{\frac{\lambda_1}{2}} - 4 = \frac{2400}{\lambda_1} - 4$$

$$\Rightarrow \frac{K_{max_2}}{K_{max_1}} = \frac{\frac{2400}{\lambda_1} - 4}{\frac{1200}{\lambda_1} - 4} = 6 \Rightarrow \frac{7200}{\lambda_1} - 24 = \frac{2400}{\lambda_1} - 4$$

$$\Rightarrow \frac{4800}{\lambda_1} = 20 \Rightarrow \lambda_1 = 240\,nm$$

۶۰ ۴

- افزایش درصد $^{235}_{92}U$ نسبت به $^{238}_{92}U$ را غنی‌سازی گویند.
- نوترون‌های تند توسط کندکننده‌هایی مانند آب معمولی، آب سنگین، گرافیت از انرژی جنبشی ۲MeV به انرژی جنبشی ۰/۰۴eV می‌رسند.
- در یک راکتور هسته‌ای علاوه بر سوخت هسته‌ای (اورانیوم ۳ درصد) و ماده کندکننده، میله‌های کنترل و شاره‌ای مانند آب تحت فشار وجود دارد.
- واکنش گداخت به‌صورت $^{2}_{1}D + {}^{3}_{1}T \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$ و جرم محصولات همانند واکنش شکافت، بیشتر از جرم اولیه است.

پاسخ تشریحی:

در فرایندهای هسته‌ای به اورانیم ۲۳۵ نیاز داریم و چون سنگ معدن اورانیم شامل هر دو اورانیم ۲۳۵ و ۲۳۸ است، با کمک فرایند غنی‌سازی باید درصد اورانیم ۲۳۵ را افزایش دهیم.

۶۱ ۳

انرژی ذخیره شده در خازن

هنگامی که خازنی به مولد وصل شده است تا در آن بار ذخیره شود، انرژی‌ای که مولد برای پر کردن خازن مصرف می‌کند، به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در میدان الکتریکی بین دو صفحه خازن ذخیره می‌شود. این انرژی از رابطه‌های زیر قابل محاسبه است:

$$U = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{q^2}{2C}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

برای مقایسهٔ انرژی در دو حالت می‌توان نوشت:

$$U=\frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

بنابراین باید $\frac{7}{16}$ از انرژی خازن را کاهش دهیم تا انرژی آن به $\frac{9}{16}$ انرژی اولیه برسد.

۶۲ **۴**

انرژی و اختلاف پتانسیل الکتریکی

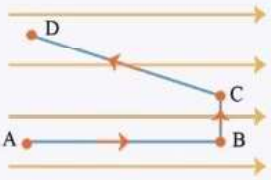
انرژی پتانسیل یعنی انرژی ذخیره‌ای و به‌طور کلی این انرژی زمانی در یک جسم ذخیره می‌شود که آن را مجبور کنیم تا برخلاف میل ذاتی خود کاری را انجام دهد. انرژی پتانسیل الکتریکی نیز یکی از صورت‌های انرژی پتانسیل بوده و از این قاعده مستثنی نیست.

تعیین علامت اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از یک میدان الکتریکی:

۱) هرگاه برای رفتن از یک نقطه به نقطه دیگر در یک میدان الکتریکی در جهت خطوط میدان حرکت کنیم، پتانسیل الکتریکی (V) کاهش می‌یابد. (AB)

۲) هرگاه برای رفتن از نقطه ۱ به نقطه ۲ در یک میدان الکتریکی عمود بر خطوط میدان حرکت کنیم پتانسیل الکتریکی (V) تغییری نخواهد داشت. (BC)

۳) هرگاه برای رفتن از نقطه ۱ به نقطه ۲ در یک میدان الکتریکی در خلاف جهت میدان حرکت کنیم پتانسیل الکتریکی (V) افزایش می‌یابد. (CD)



$$V_B<V_A \quad و \quad \Delta V_{AB}<0$$
$$V_C=V_B \quad و \quad \Delta V_{BC}=0$$
$$V_D>V_C \quad و \quad \Delta V_{CD}>0$$

پاسخ تشریحی:

اختلاف پتانسیل الکتریکی برابر است با:

$$\Delta U=q\Delta V \rightarrow 2\times10^{-3}=\left(-2\times10^{-9}\right)\times\Delta V \rightarrow \Delta V=\frac{2\times10^{-3}}{-2\times10^{-8}}=-10^5\,V$$

انرژی پتانسیل الکتریکی بار منفی با حرکت در جهت خطوط میدان افزایش می‌یابد. از طرفی با توجه به این‌که با حرکت در جهت خطوط میدان، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، $V_B<V_A$ است و در نتیجه V_B-V_A عددی منفی می‌شود، بنابراین فقط گزینهٔ (۴) صحیح است.

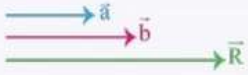
۶۳ **۱**

بردار برآیند:

برداری است که می‌تواند به جای دو یا چند بردار که نقطه اثر یکسانی دارند قرار گیرد و همان اثرگذاری را داشته باشد.

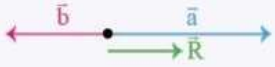
بردار برآیند در حالت‌های خاص:

الف) اگر دو بردار هم‌جهت باشند:



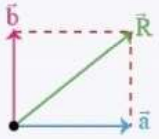
$$\alpha=0 \rightarrow R=a+b$$

ب) اگر دو بردار در خلاف جهت باشند:



$$\alpha=180^\circ \rightarrow R=|a-b|$$

پ) اگر بردارها عمود بر هم باشند:



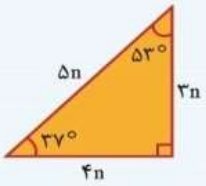
$$\alpha=90^\circ \rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

نکته بسیار پرکاربرد:

مثلث‌های زیر را به خاطر بسپارید.

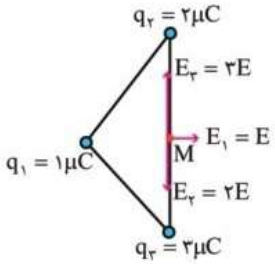


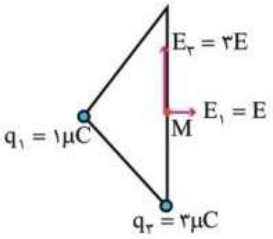
مثلث طلایی:

۵، ۴، ۳ ۱۰، ۸، ۶ ۱۵، ۱۲، ۹

پاسخ تشریحی:

با توجه به درس هندسه، می‌دانیم که میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، بنابراین فاصلهٔ هر سه بار تا نقطهٔ M یکسان است و میدان الکتریکی هریک از آن‌ها در نقطهٔ M متناسب با اندازهٔ بار آن‌ها می‌باشد.





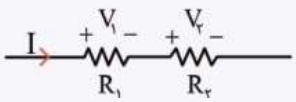
$$E_M = E\sqrt{۲} \qquad E'_M = \sqrt{E^۲ + ۳E^۲} = E\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{E'_M}{E_M} = \frac{E\sqrt{۱۰}}{E\sqrt{۲}} = \sqrt{۵}$$

۶۴ ۲

به هم بستن مقاومت‌ها:

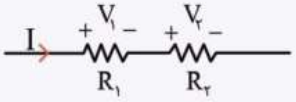
۱) اگر دو مقاومت پشت‌سرهم به‌هم وصل شوند به‌طوری که هیچ انشعابی بین دو مقاومت وجود نداشته باشد، دو مقاومت را سری(یا متوالی) گویند. در مقاومت‌های متوالی روابط زیر برقرار است.



$$R_{eq} = R_۱ + R_۲$$
$$I_{eq} = I_۱ = I_۲$$
$$V_{eq} = V_۱ + V_۲$$

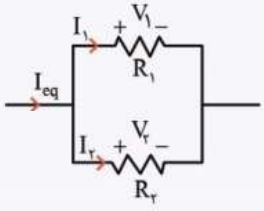
۲) در مقاومت‌های متوالی، مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌ها بزرگ‌تر است.

۳) در مقاومت‌های متوالی ولتاژ و توان مقاومت‌ها با اندازهٔ آن‌ها رابطهٔ مستقیم دارد.



$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{R_۲}{R_۱}$$
$$\frac{P_۲}{P_۱} = \frac{R_۲}{R_۱}$$

۴) هنگامی که دو سر دو مقاومت با سیم رسانا به هم متصل باشد، این دو مقاومت به صورت موازی به هم متصل شده‌اند. در مقاومت‌های موازی روابط زیر برقرار است:

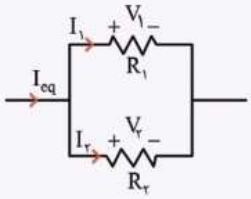


$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} \rightarrow R_{eq} = \frac{R_۱R_۲}{R_۱ + R_۲}$$
$$I_{eq} = I_۱ + I_۲$$
$$V_{eq} = V_۱ = V_۲$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۵) در مقاومت‌های موازی، مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌ها کوچک‌تر است.
۶) در مقاومت‌های موازی، جریان و توان مقاومت‌ها با اندازهٔ آن‌ها رابطهٔ عکس دارد.

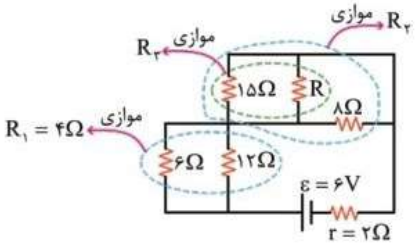


$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{R_1}{R_2}$$

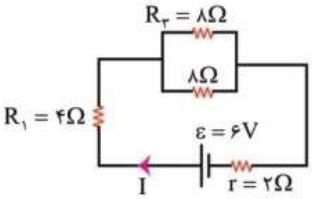
پاسخ تشریحی:

با توجه به این‌که ولتاژ مقاومت 6Ω و 8Ω یکسان است، می‌توان نتیجه گرفت که مقاومت‌های R_1 و R_2 در شکل زیر باید برابر باشند.



$$R_1=R_2 \Rightarrow \frac{6\times12}{6+12}=\frac{R_3\times8}{R_3+8} \Rightarrow R_3=8\Omega$$

دقت کنید نیازی به محاسبهٔ مقاومت R نیست و ما فقط مقاومت معادل 15Ω و R را محاسبه کردیم که برابر 8Ω شد. مدار به شکل زیر ساده می‌شود.



$$R_{eq}=4+4=8\Omega$$

$$I=\frac{\varepsilon}{r+R_{eq}}=\frac{6}{2+8}=0/6A$$

جریان $I=0/6A$ بین دو مقاومت 8Ω تقسیم می‌شود و در نتیجه جریان $0/3A$ از هر یک می‌گذرد.

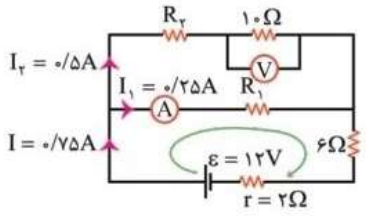
۶۵ F

پاسخ تشریحی:

جریان شاخهٔ بالایی مدار برابر است با:

$$I_2=\frac{V}{R}=\frac{5}{10}=0/5A$$

جریان شاخهٔ پایین هم همان عدد آمپرسنج یعنی $I_1=0/25A$ است، بنابراین جریان گذرنده از باتری مدار برابر $I=I_1+I_2=0/75A$ است. با یک دور حرکت در مسیر نشان داده شده در شکل، داریم:



$$\varepsilon-R_1I_1-6I-rI=0$$

$$\Rightarrow 12-R_1\times0/25-8\times0/75=0$$

$$\Rightarrow 0/25R_1=6$$

$$\Rightarrow R_1=24\Omega$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۶۶ ۳

پاسخ تشریحی:

ولتاژ دو سر باتری از رابطهٔ $V_{\text{باتری}} = \frac{R_{eq}}{R_{eq}+r}\varepsilon$ به‌دست می‌آید.

قبل از بستن کلید، $R_{eq} = ۳R$ است و بعد از بستن کلید و اتصال کوتاه شدن یکی از مقاومت‌ها، $R'_{eq} = ۲R$ می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{V'_{\text{باتری}}}{V_{\text{باتری}}} = \frac{\frac{R'_{eq}}{R'_{eq}+r}}{\frac{R_{eq}}{R_{eq}+r}} = \frac{\frac{۲R}{۲R+\frac{R}{۲}}}{\frac{۳R}{۳R+\frac{R}{۲}}} = \frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۶}{۷}} = \frac{۱۴}{۱۵}$$

---

۶۷ ۱

میدان مغناطیسی در مرکز حلقه یا پیچه

$$B = \frac{\mu_{۰} NI}{۲R} \qquad N = \frac{L'}{۲\pi R}$$

R: شعاع حلقه — L': طول سیم به‌کاررفته

I: جریان الکتریکی — $\mu_{۰}$: ضریب گذردهی مغناطیسی خلاء

پاسخ تشریحی:

میدان هریک از حلقه‌ها برابر است با:

$$B = \frac{\mu_{۰}}{۲}\frac{I}{R} = \frac{۱۲\times۱۰^{-۷}}{۲}\times\frac{۰/۵}{۰/۱۵} = ۲\times۱۰^{-۶}\,T$$

چون هر سه میدان بر هم عمودند، داریم:

$$B_{\text{کل}} = \sqrt{B_۱^۲ + B_۲^۲ + B_۳^۲} = B\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}\times۱۰^{-۶}\,T$$

---

۶۸ ۴

پاسخ تشریحی:

برای آن‌که اندازه و جهت سرعت الکترون ثابت بماند، باید نیروهای مغناطیسی و الکتریکی وارد بر آن یکدیگر را خنثی کنند.

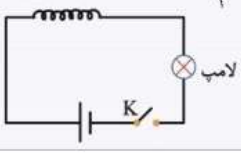
می‌دانیم نیروی مغناطیسی همواره بر مسیر حرکت الکترون عمود است، پس نیروی الکتریکی هم باید بر مسیر حرکت الکترون عمود باشد تا بتواند نیروی مغناطیسی را خنثی کند. با توجه به این‌که نیروی الکتریکی هم‌راستا با میدان الکتریکی است، میدان الکتریکی باید حتماً بر مسیر حرکت ذره عمود باشد. دقت کنید میدان مغناطیسی ممکن است بر مسیر حرکت عمود باشد یا نباشد.

---

۶۹ ۱

القاوری

وقتی در مداری جریان تغییر می‌کند، اجزایی مانند القاگر با تغییر ناگهانی جریان مخالفت می‌کنند. در واقع طبق رابطه $U = \frac{۱}{۲}LI^۲$ هنگام تغییر جریان انرژی در القاگر ذخیره یا آزاد می‌شود.



در مدار مقابل با بستن کلید K وجود القاگر باعث می‌شود جریان لامپ به تدریج افزایش یابد.

دقت کنیم که القاگر با تغییر جریان مخالفت می‌کند و پس از ثابت شدن جریان، القاگر فقط مانند یک مقاومت عمل می‌کند.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

توجه داشته باشیم که مقاومت‌ها در هنگام عبور جریان ثابت هم انرژی الکتریکی مصرف می‌کنند ولی در القاگر تغییر جریان الکتریکی باعث مبادله شدن انرژی می‌شود. در القاگرها با افزایش جریان، انرژی ذخیره می‌شود ولی با کاهش جریان، انرژی آزاد می‌شود.

انرژی ذخیره شده در القاگر و ضریب القاوری

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

A: مساحت حلقه ℓ : طول سیملوله

واحد ضریب القاوری هانری (H) است که معادل $\frac{\text{ژول}}{(\text{آمپر})^2}$ است.

با استفاده از رابطه $B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$ واحد μ_0 معادل $\frac{T.m}{A}$ است. بنابراین در رابطه $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$ خواهیم داشت:

$$\text{هانری} = \frac{\left(\frac{\text{متر.تسلا}}{\text{آمپر}}\right)(\text{مترمربع})}{\text{متر}} \rightarrow \text{هانری} = \frac{\text{تسلا.مترمربع}}{\text{آمپر}} \rightarrow H = \frac{T.m^2}{A}$$

پاسخ تشریحی:

ضریب القاوری سیملوله برابر است با:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times 8 \times 10^{-4}}{15/7 \times 10^{-2}} = 6/4\,mH$$

۷۰ | ۲

قانون فاراده

با تغییر شار مغناطیسی، نیروی محرکهٔ القایی ایجاد می‌شود.

$$\bar{\varepsilon} = -N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \xrightarrow{\varphi = BA\cos\theta} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \begin{cases} \frac{\Delta B}{\Delta t} A\cos\theta & \text{(میدان متغیر)} \\ B\frac{\Delta A}{\Delta t}\cos\theta & \text{(مساحت متغیر)} \\ \frac{BA}{\Delta t}\Delta\cos\theta & \text{(زاویهٔ متغیر)} \end{cases}$$

پاسخ تشریحی:

$$\varphi_1 = B_1 A\cos\theta = 6000 \times 10^{-4} \times \pi \times (0/1)^2 \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = 0/003\pi\,Wb$$

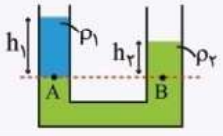
$$\varphi_2 = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -0/003\pi\,Wb$$

بنابراین طبق قانون فاراده می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{av} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{0/003\pi}{15/7 \times 10^{-3}} = \frac{3/14 \times 3}{15/7} = 0/6\,V$$

۷۱ | ۱

لوله‌های U شکل



در لوله‌های U شکل، اگر پایین‌ترین مرز مشترک مایع‌ها مشخص شود، فشار نقاط دو طرف روی این مرز مشترک برابر بوده و می‌توان نوشت:

$$P_A = P_B \rightarrow \rho_1 g h_1 + P_0 = \rho_2 g h_2 + P_0 \rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

ـ اگر بیشتر از دو مایع درون لوله U شکل باشد، می‌توان گفت جمع ρh مایع‌های دو طرف با هم برابر است.
ـ فشار هوا از طرفین این رابطه حذف می‌شود، یعنی در لوله‌های U شکلی که دو طرف آن‌ها با هوا در تماس هستند، فشار هوا تأثیری در تعادل مایعات و روابط ریاضی آن‌ها ندارد.
ـ در رابطه هم‌فشاری نوشته شده $(\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2)$، قطر و مساحت مقطع لوله‌ها تأثیری ندارد.

پاسخ تشریحی:

برای پاسخ دادن به این سؤال به نکات زیر توجه کنید:
۱) نقاط A و B در یک مایع قرار دارند و A پایین‌تر از B است، بنابراین $P_A > P_B$ می‌باشد.
۲) نقاط C و D در سطح آزاد مایعات قرار دارند و فشار در آن‌ها برابر فشار هواست، یعنی $P_C = P_D = P_.$ می‌باشد.

$$\Rightarrow P_A > P_B > P_C = P_D = P_.$$

۷۲ **۴**

فشار

فشار یک جسم جامد که ناشی از وزن آن است، از رابطه مقابل به‌دست می‌آید:

$$P = \frac{F_\perp}{A} = \frac{mg}{A}$$

در رابطه $P = \frac{mg}{A}$، همه کمیت‌ها باید در SI باشند، یعنی فشار برحسب پاسکال، مساحت برحسب مترمربع و جرم برحسب کیلوگرم است.
یکای پاسکال برحسب یکای اصلی به‌صورت زیر است:

$$Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{\frac{kg.m}{s^2}}{m^2} = \frac{kg}{m.s^2}$$

پاسخ تشریحی:

فشار پیمانه‌ای بخار داخل دیگ با فشار وزنه برابر است.

$$P_{\text{پیمانه‌ای}} = P_{\text{وزنه}} \Rightarrow ۱۰^۵ = \frac{mg}{A} = \frac{m \times ۱۰}{۵ \times ۱۰^{-۶}}$$

$$\Rightarrow m = ۰/۰۵kg = ۵۰g$$

۷۳ **۱**

کار

کار یک نیروی ثابت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$W = Fd\cos\theta$$

W: کار نیروی F (برحسب J) F: اندازهٔ نیرو (برحسب N) d: اندازهٔ جابه‌جایی (برحسب m)
θ : زاویه بین بردار نیرو و بردار جابه‌جایی
علامت کار یک نیرو به زاویهٔ بین آن نیرو و جابه‌جایی بستگی دارد به گونه‌ای که:
۱) اگر $W > ۰ \leftarrow \cos\theta > ۰ \leftarrow \theta < ۹۰$
۲) اگر $W < ۰ \leftarrow \cos\theta < ۰ \leftarrow \theta > ۹۰$
۳) اگر $W = ۰ \leftarrow \cos\theta = ۰ \leftarrow \theta = ۹۰$
بنابراین در یک جابه‌جایی، کار نیروهایی که راستای آن‌ها عمود بر راستای جابه‌جایی جسم است صفر می‌باشد.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

کار کل

کار کل نیروهای وارد بر یک جسم را با W_t نمایش می‌دهیم و مقدار آن از جمع جبری کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر:

$$W_t = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots$$

پاسخ تشریحی:

کار کل انجام شده روی سورتمه برابر تغییرات انرژی جنبشی آن است.

$$W_{f_k} = -f_k d = -4000 \times 5 = -20000\,J$$

$$W_F = F d \cos\alpha = 6000 \times 5 \times \cos 37^\circ = 24000\,J$$

$$\Rightarrow \Delta K = W_{\text{کل}} = W_{f_k} + W_F = -20000 + 24000 = +4000\,J$$

---

۷۴ گزینه ۴

دمای تعادل و تعادل گرمایی

هرگاه دو یا چند ماده با دماهای مختلف را در کنار یکدیگر قرار دهیم، تا زمانی که با یکدیگر هم‌دما شوند، بین آن‌ها مبادله گرما صورت می‌گیرد. در این شرایط می‌گوئیم اجسام با یکدیگر به تعادل گرمایی رسیده‌اند و به دمایی که در آن قرار دارند، دمای تعادل گفته می‌شود. دمای تعادل را با θ_e نشان می‌دهیم.

در مسائل تعادل گرمایی در صورت عدم اتلاف انرژی، رابطهٔ زیر برقرار است:

(مجموع گرمای گرما گیرنده‌ها) + (مجموع گرمای گرما دهنده‌ها) $= 0$

نکات طلایی

ـ در مسائل تعادل گرمایی نیاز نیست کمیت‌ها الزاماً در SI باشند، بلکه هم‌یکا باشند کافی است!

ـ در مسائل تعادل گرمایی پس از نوشتن رابطهٔ مربوطه می‌توانیم عوامل مشترک در تمام جمله‌ها را خط بزنیم!

ـ هرگاه در یک سؤال، پس از برقراری تعادل، آب و یخ در کنار هم داشته باشیم، دمای تعادل الزاماً صفر و هرگاه پس از برقراری تعادل، آب و بخار آب در کنار هم داشته باشیم، دمای تعادل الزاماً $100^\circ C$ است.

پاسخ تشریحی:

ابتدا دمای تعادل ۸۰ گرم آب $20^\circ C$ و ۲۰ گرم آب $80^\circ C$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\theta_e = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \xrightarrow{c_1 = c_2} \theta_e = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \theta_e = \frac{80 \times 20 + 20 \times 80}{80 + 20} = 32^\circ C$$

هنگامی که این آب $32^\circ C$ را درون ظرفی با دمای $32^\circ C$ می‌ریزیم، چون دمای آن‌ها برابر است، دمای آب تغییری نمی‌کند و دمای تعادل همان $32^\circ C$ می‌باشد.

---

۷۵ گزینه ۳

قانون گازهای کامل

برای یک گاز کامل، قانون گازهای کامل به صورت زیر است:

$$PV = nRT$$

P: برحسب Pa V: برحسب m^3 n: برحسب مول T: برحسب کلوین (K)

در این رابطه R، ثابت جهانی گازها نام دارد و معادل با $8/314 \frac{J}{mol.K}$ است.

برای مقایسهٔ یک گاز در دو حالت مختلف می‌توان به این شکل نوشت:

$$\frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} = \frac{P_1 V_1}{n_1 T_1}$$

در حالت مقایسه، دماها الزاماً باید برحسب کلوین باشند اما سایر کمیت‌ها هم‌یکا باشند، کافی است.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پاسخ تشریحی:

فشار اولیهٔ گاز برابر است با:

$$P_1 = P_0 + P_{\text{پیستون}} = P_0 + \frac{mg}{A}$$

فشار ثانویهٔ گاز برابر است با:

$$P_2 = P_0 + P_{\text{پیستون}} + P_{\text{وزنه}} = P_0 + \frac{mg}{A} + \frac{9mg}{A} = P_0 + \frac{10mg}{A}$$

در حالت دوم، پیستون $10cm$ پایین آمده و حجم گاز به $\frac{3}{4}$ حجم اولیهٔ آن رسیده است. با توجه به ثابت بودن دما می‌توان نوشت:

$$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow \left(P_0 + \frac{mg}{A}\right)V_1 = \left(P_0 + \frac{10mg}{A}\right) \times \frac{3}{4}V_1$$

$$\Rightarrow P_0 + \frac{17/5}{50 \times 10^{-4}} = \frac{3}{4}P_0 + \frac{3}{4} \times \frac{175}{50 \times 10^{-4}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}P_0 = \frac{6/5 \times 17/5}{50 \times 10^{-4}} = 22750 \Rightarrow P_0 = 91000Pa = 9/1 \times 10^4 Pa$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۷۶ ۲

پاسخ تشریحی:

بیست و چهارمین عنصر جدول تناوبی عنصر کروم است که آرایش الکترونی آن، به صورت زیر است:

$_{۲۴}Cr: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۵۴s^۱$

با توجه به آرایش الکترونی عنصر کروم، این عنصر در گروه ششم جدول تناوبی قرار گرفته است. همانطور که می‌دانیم عناصری که در یک گروه قرار دارند، لایه ظرفیت مشابهی دارند. بنابراین می‌توان گفت که عنصر X نیز در گروه ششم جدول تناوبی قرار گرفته است.

از طرفی ایتریم($_{۳۹}Y$) اولین عنصر واسطه دوره پنجم جدول تناوبی است که شمار الکترون‌های آن با یکی از یون‌های پایدار عنصر X برابر است. از آنجا که عنصر X یکی از فلزات واسطه گروه ششم جدول تناوبی بوده و کاتیون تشکیل می‌دهد و با توجه به برابر بودن شمار الکترون‌های یکی از یون‌های آن با عنصر ایتریم، می‌توان گفت که عنصر X نیز در دوره پنجم واقع شده است. با توجه به توضیحات داده‌شده، آرایش الکترونی عنصر X به صورت زیر است:

$X: ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۶۴d^۵۵s^۱$

بر اساس آرایش الکترونی رسم‌شده، عنصر X معادل با عنصر $^{۹۶}_{۴۲}Mo$ بوده که در دوره پنجم و گروه ششم جدول تناوبی قرار دارد.

در نهایت شمار نوترون‌های عنصر $^{۹۶}_{۴۲}Mo$ را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم عدد جرمی یک عنصر معادل با مجموع تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های آن است. بر این اساس، داریم:

$A = Z + n \longrightarrow ۹۶ = ۴۲ + x \longrightarrow x = ۵۴$

بنابراین شمار نوترون‌های آن، معادل با ۵۴ خواهد بود.

---

۷۷ ۳

پاسخ تشریحی:

هر نوع کالا، خط نماد ویژه خود را دارد. با خواندن آن به وسیلهٔ دستگاه لیزری ویژه‌ای که به رایانه متصل است، نوع و قیمت کالا به سرعت روی صفحهٔ نمایشگر ظاهر می‌شود. از آنجا که هر عنصر نیز، طیف نشری خطی ویژه خود را دارد، می‌توان گفت که کاربرد طیف نشری خطی از برخی جنبه‌ها مانند کاربرد خط نماد(بارکد) روی جعبه و یا بستهٔ مواد غذایی و بسیاری از کالاهاست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هر عنصر طیف نشری خطی ویژه خود را دارد و مانند اثر انگشت ما می‌توان برای شناسایی عنصر از آن استفاده کرد.

۲) طیف نشری خطی دو عنصر لیتیم و هیدروژن به صورت زیر است:

با توجه به طیف نشری خطی این دو عنصر، می‌توان گفت که هر دو عنصر دارای ۴ نوار رنگی در ناحیه مرئی خود هستند.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۴ بسیاری از نمک‌ها شعلهٔ رنگی دارند به طوری که اگر مقداری از محلول نمک را با افشانه روی شعله بپاشیم، رنگ شعله تغییر می‌کند. به عنوان مثال، رنگ شعله لیتیم و همه ترکیبات آن، به رنگ سرخ است. از این رو، می‌توان نتیجه گرفت که رنگ سرخ ایجادشده در یک شعله می‌تواند نشان‌دهندهٔ وجود عنصر لیتیم در آن باشد.

---

۷۸ | ۴

پاسخ تشریحی:

تکنسیم($_{۴۳}Tc$) نخستین عنصر تولیدشده در واکنشگاه هسته‌ای بوده که در گروه هفتم جدول تناوبی قرار دارد. از طرفی می‌دانیم عنصر نیکل($_{۲۸}Ni$) در دوره چهارم واقع شده است. بنابراین عنصر موردنظر منگنز($_{۲۵}Mn$) بوده که در دوره چهارم و گروه هفتم جدول تناوبی قرار دارد و آرایش الکترونی آن به صورت زیر است:

$$_{۲۵}Mn : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۵۴s^۲$$

در ترکیب $Mn_۲O_۳$، هر اتم منگنز سه الکترون از دست داده و کاتیون سه بار مثبت تشکیل می‌دهد. آرایش الکترونی کاتیون $Mn^{۳+}$ آن به صورت زیر است:

$$Mn^{۳+} : [_{۱۸}Ar]۳d^۴$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در ترکیب $Mn_۲O_۳$، هر اتم منگنز سه الکترون از دست داده و کاتیون سه بار مثبت تشکیل می‌دهد. در حالی که آرایش الکترونی رسم شده، معادل با آرایش الکترونی اتم منگنز است.

۲ در ترکیب $MnCl_۲$، هر اتم منگنز دو الکترون از دست داده و کاتیون دو بار مثبت تشکیل می‌دهد در حالی که آرایش الکترونی رسم‌شده، معادل با آرایش الکترونی اتم منگنز است. آرایش الکترونی کاتیون $Mn^{۲+}$ آن به صورت زیر است:

$$Mn^{۲+} : [_{۱۸}Ar]۳d^۵$$

۳ در ترکیب $MnCl_۲$، هر اتم منگنز دو الکترون از دست داده و کاتیون دو بار مثبت تشکیل می‌دهد در حالی که آرایش الکترونی رسم‌شده، معادل با آرایش الکترونی کاتیون $Mn^{۳+}$ است.

---

۷۹ | ۱

پاسخ تشریحی:

اصطلاح لایه اوزون به منطقه مشخصی از استراتوسفر می‌گویند که بیشترین مقدار اوزون در آن محدوده قرار دارد. مولکول‌های اوزون مانع ورود بخش عمده‌ای از تابش فرابنفش خورشید به سطح زمین می‌شود تا موجودات زنده از آثار زیانبار این تابش در امان بمانند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ ابتدا به درسنامه زیر دقت کنید:

گاز نیتروژن واکنش‌پذیری ناچیزی دارد و بزرگ‌ترین چالش در تهیهٔ آمونیاک از نیتروژن و هیدروژن این است که در دما و فشار اتاق حتی در حضور کاتالیزگر و یا جرقه نیز، واکنشی بین آن‌ها انجام نمی‌شود.

$$H_۲(g) + N_۲(g) \xrightarrow{\text{کاتالیزگر یا جرقه}} \text{واکنشی رخ نمی‌دهد}$$

دانشمندی به نام هابر، واکنش را بارها در دماها و فشارهای گوناگون انجام داد تا بتواند شرایط بهینهٔ آن را پیدا کند.

$$۳H_۲(g) + N_۲(g) \xrightarrow{\text{شرایط بهینه}} ۲NH_۳(g)$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

سرانجام دریافت که اگر مخلوط این گازها از روی یک ورقهٔ آهنی (کاتالیزگر) در دما و فشار مناسب عبور داده شود، با انجام واکنش، مقدار قابل توجهی از گاز آمونیاک تولید می‌شود. طی این واکنش ۳ مول هیدروژن به همراه ۱ مول نیتروژن مصرف می‌شود و ۲ مول آمونیاک به دست می‌آید. توجه داریم که در این فرایند همهٔ واکنش‌دهنده‌ها به فراورده تبدیل نخواهند شد؛ زیرا این واکنش برگشت‌پذیر است؛ با این توصیف، در ظرف واکنش مخلوطی از سه گاز هیدروژن، نیتروژن و آمونیاک وجود دارد. با توجه به نقطه جوش آن‌ها می‌توان دریافت که با کاهش دما به دماهای پایین‌تر از نقطه جوش آمونیاک (پایین‌تر از دمای $-۳۳^{\circ}C$)، آمونیاک به مایع تبدیل می‌شود و می‌توان آن را از مخلوط جداسازی کرد.

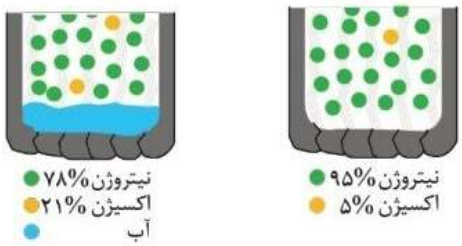
ماده	نقطه جوش ($^{\circ}C$)
H_2	-۲۵۳
N_2	-۱۹۶
NH_3	-۳۳

به طور خلاصه فرایند هابر را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

در فرایند تهیه آمونیاک به کمک فرایند هابر، با کاهش دما تا حدود $-۴۰^{\circ}C$ ، آمونیاک به حالت مایع درمی‌آید و می‌توان آن را از مخلوط جدا کرد.

۳ به منظور پرکردن و تنظیم باد خودرو به جای هوا از گاز نیتروژن استفاده می‌شود.

گاز نیتروژن فراوان‌ترین گاز سازنده هواکره بوده و درصد حجمی آن معادل با ۷۸ درصد است، درحالی که درصد حجمی این گاز در تایر خودرو معادل ۹۵ درصد است. بنابراین نسبت خواسته‌شده به تقریب معادل با ۰/۸۲ است.



با توجه به شکل بالا پر کردن تایر خودرو با گاز نیتروژن موجب می‌شود که در داخل تایر رطوبتی وجود نداشته باشد. زیرا رطوبت سبب زنگ زدن سیم‌های فولادی تایر خواهد شد. از طرفی، مولکول‌های اکسیژن به علت اندازه کوچکتر نسبت به مولکول‌های نیتروژن، تمایل بیشتری به خروج از تایر دارند و استفاده از گاز نیتروژن موجب می‌شود که لاستیک دیرتر کم‌باد شود.

۴ گاز نیتروژن بیشترین درصد را در میان گازهای سازنده هواکره دارد و در صنعت، کاربردهای گسترده‌ای دارد. از گاز نیتروژن برای پرکردن تایرخودروها، در صنعت سرماسازی برای انجماد مواد غذایی و برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی استفاده می‌شود.

نیتروژن‌نامه

- ✓ عنصر نیتروژن از جمله عناصری بوده که به صورت مولکول‌های دواتمی (N_2) در طبیعت وجود دارد.
- ✓ گاز نیتروژن فراوان‌ترین گاز سازنده هواکره بوده و درصد حجمی آن در هواکره به‌تقریب معادل با ۷۸ درصد است.
- ✓ از گاز نیتروژن برای پرکردن تایرخودروها، در صنعت سرماسازی برای انجماد مواد غذایی و برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی استفاده می‌شود.
- ✓ این گاز را از تقطیر جزء به جزء هوای مایع تهیه می‌کنند. توجه داریم که نقطه جوش نیتروژن معادل با $-۱۹۶^{\circ}C$ بوده و اولین گازی است که از برج تقطیر جدا می‌شود.
- ✓ گاز نیتروژن به عنوان اصلی‌ترین جزء سازنده هواکره، واکنش‌پذیری بسیار کمی دارد و به طور معمول با اکسیژن واکنش نمی‌دهد. اما تنها هنگام رعد و برق، این دو گاز در هواکره ترکیب شده و به اکسیدهای نیتروژن تبدیل می‌شوند.
- ✓ گاز نیتروژن به جو بی‌اثر شهرت یافته و در محیط‌هایی که گاز اکسیژن، عامل ایجاد تغییر شیمیایی است، به‌جای آن از گاز نیتروژن استفاده می‌شود.
- ✓ در فرایند هابر، گاز نیتروژن تحت شرایط ویژه با گاز هیدروژن واکنش داده و گاز آمونیاک تولید می‌شود.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۸۰ ۴

پاسخ تشریحی:

معادله موازنه‌شده گاز نیتروژن و اکسیژن به صورت زیر است:

$$N_2 + O_2 \longrightarrow 2NO$$

با توجه به معادله موازنه‌شده، به ازای هر بار انجام واکنش یک مول گاز اکسیژن(معادل با ۳۲ گرم) و یک مول گاز نیتروژن(معادل با ۲۸ گرم) مصرف می‌شود. از این رو، تفاوت جرم گازهای مصرف‌شده به ازای هربار انجام واکنش معادل با ۴ گرم است. از طرفی طی این واکنش، دو مول گاز NO تولید می‌شود. بر این اساس، میزان گاز تولیدشده را در صورتی که تفاوت جرم گاز نیتروژن و اکسیژن مصرف‌شده برابر با ۰/۱۲۵ گرم باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$?\,g\,NO = ۰/۱۲۵\,g \text{ تفاوت جرم} \times \frac{۲\,mol\,NO}{۴\,g \text{ تفاوت جرم}} \times \frac{۳۰\,g\,NO}{۱\,mol\,NO} = ۱/۸۷۵\,g\,NO$$

گاز نیتروژن مونوکسید تولیدشده مطابق معادله موازنه‌شده زیر با گاز اکسیژن واکنش می‌دهد:

$$2NO + O_2 \longrightarrow 2NO_2$$

براین اساس، حجم نیتروژن دی‌اکسید تولیدشده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,L\,NO_2 = ۱/۸۷۵\,g\,NO \times \frac{۱\,mol\,NO}{۳۰\,g\,NO} \times \frac{۲\,mol\,NO_2}{۲\,mol\,NO} \times \frac{۲۲/۴\,L\,NO_2}{۱\,mol\,NO_2} = ۱/۴\,L$$

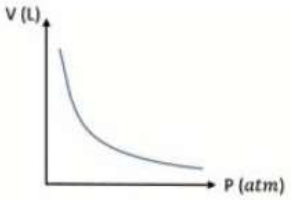
بر این اساس، در اثر واکنش نیتروژن مونوکسید با گاز اکسیژن، ۱/۴ لیتر گاز نیتروژن دی اکسید تولید خواهد شد.

---

۸۱ ۳

پاسخ تشریحی:

فاصلهٔ بین مولکول‌های یک نمونه گازی، تابعی از فشار وارد بر آن بوده و با افزایش فشار وارد بر یک نمونه گاز، میزان فاصله بین مولکول‌ها کاهش می‌یابد. نمودار رابطه حجم گاز بر حسب فشار در دمای ثابت به صورت زیر است:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گازها شکل و حجم معینی ندارند درحالی که مایعات شکل مشخصی ندارند اما دارای حجم مشخصی هستند. از طرفی جامدات، هم شکل معین و هم حجم معین دارند.

۲) توجه داریم که با افزایش فشار بر یک نمونه گاز، حجم گاز که معادل با میزان فاصله بین مولکول‌ها هست کاهش می‌یابد و اندازه مولکول گازی با افزایش فشار تغییری نخواهد کرد.

۴) بر اساس قانون آووگادرو، هر مول از گازهای گوناگون در دما و فشار یکسان، حجم مشابهی دارند. با توجه به متفاوت بودن جرم مولی گاز CO_2 و CO، ۱ گرم از آن‌ها، میزان مول مشابهی نداشته و درنتیجه حجم متفاوتی نیز خواهند داشت.

---

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۸۲ ۴

پاسخ تشریحی:

در قدم اول، جرم باریم هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم. با توجه به اینکه چگالی محلول معادل با ۱ گرم بر میلی‌لیتر است، جرم محلول معادل با ۲۰۰ گرم خواهد بود. بر این اساس، داریم:

$$\text{غلظت } ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ \Rightarrow ۲۱۳۷۵ = \frac{x\ g}{۲۰۰\ g} \times ۱۰^۶ \Rightarrow x = ۴/۲۷۵\ g\ Ba(OH)_۲$$

بنابراین جرم باریم هیدروکسید موجود در محلول معادل با ۴/۲۷۵ گرم است که طبق معادله موازنه‌شده زیر با محلول هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد.

$$Ba(OH)_۲(aq) + ۲HCl(aq) \longrightarrow BaCl_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$$

با توجه به معادله موازنه‌شده، به ازای مصرف هر مول باریم هیدروکسید، دو مول HCl مصرف می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$?\ mL\ HCl = ۴/۲۷۵\ g\ Ba(OH)_۲ \times \frac{۱\ mol\ Ba(OH)_۲}{۱۷۱\ g\ Ba(OH)_۲} \times \frac{۲\ mol\ HCl}{۱\ mol\ Ba(OH)_۲} \times \frac{۱\ L\ HCl}{۰/۴\ mol\ HCl} = ۰/۱۲۵\ L$$

بنابراین باریم هیدروکسید موجود در محلول با ۱۲۵ میلی‌لیتر محلول ۰/۴ مولار هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد.

۸۳ ۱

پاسخ تشریحی:

مولکول آب و هیدروژن سولفید هر دو قطبی بوده و ساختار خمیده دارند. اما به علت وجود پیوند هیدروژنی در آب، نقطه جوش آب از هیدروژن سولفید بسیار بیشتر است به طوری که نقطه جوش آب معادل ۱۰۰ درجه و نقطه جوش هیدروژن سولفید برابر با ۶۰- درجه است.

ماده	فرمول شیمیایی	مدل فضا پرکن	قطبیت مولکول	جرم مولی $\left(g.mol^{-۱}\right)$	حالت فیزیکی $(۲۵°C)$	نقطهٔ جوش $(°C)$
آب	$H_۲O$		قطبی	۱۸	مایع	۱۰۰
هیدروژن سولفید	$H_۲S$		قطبی	۳۴	گاز	۶۰-

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) با توجه به جدول بالا، هر دو مولکول آب و هیدروژن سولفید ساختار مشابهی دارند.

۳) علت تفاوت نقطه جوش این دو مولکول، وجود پیوند هیدروژنی در مولکول آب است.

۴) گشتاور دوقطبی آب معادل با ۱/۸۵ دبای و گشتاور دوقطبی هیدروژن سولفید معادل با ۰/۹۷ دبای است. درحالی که کربن دی اکسید و کربن دی سولفید، هر دو ناقطبی بوده و گشتاور دوقطبی این دو مولکول برابر صفر است. ساختار لوویس کربن دی اکسید و کربن دی سولفید به صورت زیر است:

$$\ddot{O}=C=\ddot{O} \qquad \ddot{S}=C=\ddot{S}$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۸۴ ۲

عبارت‌های الف و ب درست هستند.

بررسی موارد:

الف) اکثر فلزات اصلی با از دست دادن الکترون به آرایش الکترونی گاز نجیب پیش از خود می‌رسند. گالیم از جمله فلزات اصلی است که آرایش الکترونی یون پایدار آن به گاز نجیب ختم نمی‌شود. شمار الکترون‌ها در همه زیرلایه‌های الکترونی یون تمامی این عناصر عددی زوج است.

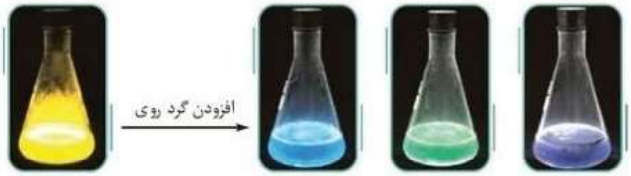
ب) اتم گالیم با از دست دادن سه الکترون(Ga^{3+}) و اتم روی با از دست دادن دو الکترون(Zn^{2+}) کاتیون تشکیل می‌دهند. آرایش الکترونی کاتیون این دو عنصر به صورت زیر است:

$_{31}Ga^{3+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10}$

$_{30}Zn^{2+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10}$

با توجه به آرایش الکترونی رسم‌شده، کاتیون این دو عنصر آرایش الکترونی مشابهی دارند.

پ) شکل زیر، پیشرفت واکنش فلز روی با محلول نمکی از وانادیم(V) را نشان می‌دهد.



محلولی از نمک وانادیم (V) (زرد) | محلولی از نمک وانادیم (IV) (آبی) | محلولی از نمک وانادیم (III) (سبز) | محلولی از نمک وانادیم (II) (بنفش)

با توجه به شکل بالا در واکنش فلز روی با محلولی از نمک وانادیم، عنصر روی به عنوان کاهنده عمل کرده و باعث کاهش عدد اکسایش وانادیم در محلول این عنصر می‌شود. با انجام این واکنش، رنگ محلول از زرد می‌تواند به رنگ‌های آبی، سبز و یا بنفش تغییر کند.

ت) یکی از روش‌های بیرون کشیدن فلز از لابه‌لای خاک، استفاده از گیاهان است. در این روش در معدن یا خاک دارای فلز، گیاهانی را می‌کارند که می‌توانند آن فلز را جذب کنند. سپس گیاه را برداشت می‌کنند، می‌سوزانند و از خاکستر حاصل، فلز را جداسازی می‌کنند. توجه داریم که این روش برای استخراج فلزهای نیکل و روی مقرون به صرفه نیست.

۸۵ ۳

پاسخ تشریحی:

ماده M برخلاف دو ماده دیگر محلول نیست و درمورد مقایسه انحلال‌پذیری ماده A و D نمی‌توان اظهار نظر کرد. بنابراین می‌توان گفت که انحلال‌پذیری ماده M نسبت به هر دو ماده A و D کمتر است.

در رابطه با محلول‌ها، به مطالب زیر توجه کنید:

- ✓ محلول؛ مخلوطی همگن از دو یا چند ماده است که حالت فیزیکی و ترکیب شیمیایی محلول در سرتاسر آن، یکسان و یکنواخت است.
- ✓ محلول‌ها می‌توانند به سه حالت وجود داشته باشند:

الف) گازی ← هوا

ب) مایع ← سرم فیزیولوژیک، ضد یخ (اتیلن گلیکول در آب)، گلاب (مخلوط همگن از چند مادهٔ آلی در آب)

ج) جامد ← سکهٔ فلزی

- ✓ برخی محلول‌ها رقیق و برخی غلیظ هستند که از جمله محلول‌های رقیق، سرم فیزیولوژیک را می‌توان نام برد. از جمله محلول‌های غلیظ گلاب دو آتشه، محلول نیتریک اسید ۷۰٪ جرمی، آب دریای مرده و آب دریاچهٔ ارومیه را می‌توان مثال زد.
- ✓ مقایسهٔ غلظت آب چهار دریا به صورت زیر است:

اقیانوس آرام < دریای مدیترانه < دریای سرخ < دریای مرده

برای راحت‌تر به خاطر سپردن ترتیب نام دریاها؛ از رمز «مرده، در سرخی مدیترانه آرام گرفت» استفاده کنید.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۸۶ ۱

پاسخ تشریحی:

معادله موازنه‌شده واکنش به صورت زیر است:

$$۵H_۲SO_۴(aq) + ۲K_۲CrO_۴(aq) + ۳NaNO_۲(aq) \longrightarrow ۱Cr_۲(SO_۴)_۳(aq) + ۲K_۲SO_۴(aq) + ۳NaNO_۳(aq) + ۵H_۲O(l)$$

براین اساس، مجموع ضرایب معادله برابر با ۲۱ است.

بسیاری از واکنش‌ها با آن بازده یا راندمانی(R) که ما می‌خواهیم پیشرفت نمی‌کنند و معمولا مقدار فراورده‌های به دست آمده در عمل، کمتر از مقدار فراورده‌هایی است که ما انتظار داریم تولید شوند. به همین دلیل، برای پیشرفت واکنش از کمیتی به نام بازده درصدی استفاده می‌شود. به مقدار فراوردهٔ مورد انتظار در هر واکنش، مقدار نظری می‌گویند. که از محاسبات استوکیومتری بدست می‌آید و به مقدار فراورده‌ای که در عمل تولید می‌شود، مقدار عملی می‌گویند. فرمول بازدهٔ درصدی یک واکنش به صورت زیر است:

$$\text{بازده درصدی واکنش } (R) = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰$$

در اغلب واکنش‌های شیمیایی، مقدار فراورده‌ای که در عمل به‌دست می‌آید(مقدار عملی)، کمتر از مقدار نظری است. در نتیجه بازده اغلب واکنش‌های شیمیایی کمتر از ۱۰۰ درصد است. برای حل سوالات بازده درصدی به روش کسر تبدیل، اگر از واکنش‌دهنده به فراورده رسیدیم، واکنش را در کسر $(\frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰})$ ضرب کرده و اگر از فراورده به واکنش‌دهنده رسیدیم، واکنش را در کسر $(\frac{۱۰۰}{\text{بازده درصدی}})$ ضرب می‌کنیم.

با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش، به ازای مصرف ۳ مول $NaNO_۲$، یک مول $Cr_۲(SO_۴)_۳$ تولید می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\text{بازده درصدی } ? = ۸۲/۸\ g\ NaNO_۲ \times \frac{۱\ mol\ NaNO_۲}{۶۹\ g\ NaNO_۲} \times \frac{۱\ mol\ Cr_۲(SO_۴)_۳}{۳\ mol\ NaNO_۲} \times \frac{۳۹۲\ g\ Cr_۲(SO_۴)_۳}{۱\ mol\ Cr_۲(SO_۴)_۳} \times \frac{X}{۱۰۰} = ۱۴۱/۱۲\ g \longrightarrow X = ۹۰٪$$

به منظور محاسبه بازده درصدی واکنش می‌توانیم از روش تناسب نیز کمک بگیریم:

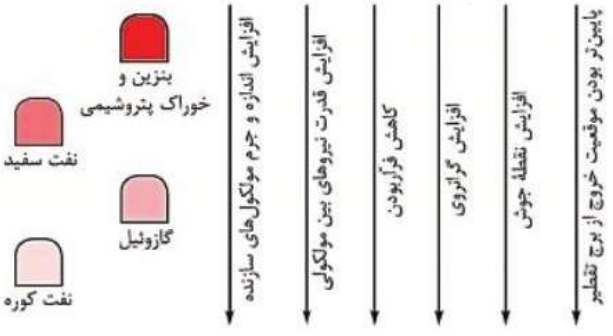
$$\left[\frac{NaNO_۲ \text{ بازده درصدی} \times \text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}\right] = \left[\frac{Cr_۲(SO_۴)_۳ \text{ جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}\right] \Longrightarrow \frac{۸۲/۸\ g\ NaNO_۲ \times X}{۳ \times ۶۹\ g\ NaNO_۲} = \frac{۱۴۱/۱۲\ g\ Cr_۲(SO_۴)_۳}{۱ \times ۳۹۲\ g\ Cr_۲(SO_۴)_۳} \longrightarrow X = ۹۰٪$$

بر این اساس، بازده درصدی واکنش معادل با ۹۰ درصد است.

۸۷ ۳

پاسخ تشریحی:

نفت کوره از مولکول‌هایی تشکیل‌شده است که نسبت به نفت سفید شمار اتم کربن بیشتری داشته و در نتیجه از نیروهای بین مولکولی قوی‌تر و فراریت کمتری برخوردارند. بنابراین می‌توان گفت اگر در دمای مشخص، یک نمونه نفت کوره به حالت بخار وجود داشته باشد، در آن دما نفت سفید نیز حالت بخار دارد. شکل زیر اجزای سازندهٔ نفت خام را با یکدیگر مقایسه می‌کند.



www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) واکنش تولید اتانول از اتن در حضور سولفوریک اسید انجام می‌شود. در این واکنش، اتن با آب واکنش‌داده و اتانول تولید خواهد شد. توجه داریم که سولفوریک‌اسید، کاتالیزگر واکنش است.

۲) هیدروکربن‌های سیرشده که شامل آلکان‌ها و سیکلوآلکان‌ها می‌شوند، با بخار برم، بخارآب و گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهند اما آلکن‌ها و آلکین‌ها به علت سیرنشده بودن، می‌توانند با این مواد واکنش داده و به ترکیبی سیرشده تبدیل شوند. واکنش کلی آلکن‌ها و آلکین‌ها با گاز هیدروژن و بخار برم به صورت زیر است:

آلکن‌ها: $C_nH_{2n} + Br_2 \longrightarrow C_nH_{2n}Br_2$ و $C_nH_{2n} + H_2 \xrightarrow{Ni} C_nH_{2n+2}$

آلکین‌ها: $C_nH_{2n-2} + 2Br_2 \longrightarrow C_nH_{2n-2}Br_4$ و $C_nH_{2n-2} + 2H_2 \xrightarrow{Ni} C_nH_{2n+2}$

تمامی آلکن‌ها می‌توانند با یک مول هیدروژن واکنش داده و به آلکان هم‌کربن خود تبدیل شوند.

۴) در برج تقطیر از پایین به بالا، دما کاهش یافته و موادی که سبک‌ترند و اندازهٔ کوچکتری دارند، به سمت بالای برج حرکت می‌کنند. بنابراین در این فرایند، روند تغییرات دما و اندازهٔ مولکول‌های خروجی از برج، شبیه یکدیگر است.

---

۲ ۸۸

پاسخ تشریحی:

معادله موازنه‌شده واکنش به صورت زیر است:

$$2CH_4(g) \longrightarrow C_2H_6(g) + H_2(g)$$

برای تعیین آنتالپی یک واکنش از طریق آنتالپی پیوند از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta H \text{ واکنش} = \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}\right] - \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}\right]$$

طبق این رابطه در صورتی که ΔH بزرگتر از صفر باشد، واکنش گرماگیر بوده و Q در سمت واکنش‌دهنده‌ها قرار می‌گیرد. در حالی که اگر ΔH کوچکتر از صفر باشد، واکنش گرماده بوده و Q در سمت فراورده‌ها قرار می‌گیرد.

ΔH واکنش معادل با ۶۵+ کیلوژول است. بر این اساس، داریم:

$$65 = 8\,\Delta H(C-H) - \Delta H(C-C) - 6\,\Delta H(C-H) - \Delta H(H-H)$$

$$\longrightarrow 2\,\Delta H(C-H) - \Delta H(C-C) - \Delta H(H-H) = 65 \longrightarrow 2\,\Delta H(C-H) - (348 + 435) = 65$$

$$\longrightarrow \Delta H(C-H) = 424\ kJ.mol^{-1}$$

بنابراین آنتالپی پیوند $C-H$ معادل با ۴۲۴ کیلوژول بر مول است.

---

۴ ۸۹

تمامی عبارات بیان‌شده درست هستند.

بررسی موارد:

الف) تمامی عناصر شبه‌فلز جدول تناوبی در دسته p قرار گرفته‌اند. توجه داریم که عناصر فلزی در هر چهار دسته s,p,d,f قرار دارند و نافلزات نیز در دستهٔ s و p واقع شده‌اند.

ب) در یک گروه از بالا به پایین بر خاصیت فلزی افزوده شده و از خاصیت نافلزی کاسته می‌شود. بنابراین می‌توان گفت که در یک گروه، عدد اتمی یک عنصر فلزی به یقین بیشتر از نافلز هم‌گروه آن است.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پ) عنصر $_{۳۵}Br$ تنها نافلز مایع جدول تناوبی است که در دوره چهارم واقع شده است. در دوره چهارم جدول تناوبی، تنها عنصر کریپتون به حالت گازی وجود دارد که فعالیت شیمیایی ناچیزی دارد.

ت) در یک دوره از جدول تناوبی از چپ به راست از خاصیت فلزی کاسته می‌شود. بنابراین می‌توان گفت که عنصرهای سمت چپ یک شبه فلز در جدول تناوبی، می‌توانند شبه فلز و فلز باشند. به عنوان مثال در دوره چهارم جدول تناوبی می‌توان عنصر آرسنیک را مثال زد که یک شبه‌فلز است و عنصر قبلی آن ژرمانیم بوده که آن نیز یک شبه‌فلز محسوب می‌شود و تمامی عناصر قبل از ژرمانیم در دوره چهارم جدول، فلزند. همانطور که می‌دانیم خواص فیزیکی شبه فلزات مانند فلزات و خواص شیمیایی آن‌ها مانند نافلزات است.

۹۰ | ۲

برای محاسبهٔ سرعت متوسط مصرف یا تولید مواد شرکت‌کننده در یک واکنش شیمیایی، باید از کمیت‌های قابل اندازه‌گیری مواد شرکت‌کننده در آن واکنش مانند جرم، فشار،غلظت و یا حجم استفاده کنیم. رابطهٔ سرعت متوسط مصرف یا تولید یک ماده در یک واکنش شیمیایی به صورت زیر است:

$$R = \frac{|n_۲ - n_۱|}{\Delta t} = \frac{|\Delta n|}{\Delta t}$$

در این رابطه R معادل با سرعت متوسط مصرف یا تولید یک ماده، Δt بیانگر طول یک بازهٔ زمانی و Δn معادل تغییر مقدار کمیت موردنظر در طول آن بازهٔ زمانی است. به‌علاوه، می‌دانیم که سرعت متوسط مصرف یا تولید مواد شرکت‌کننده در یک واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها خواهد بود. به عبارت دیگر، اگر ضرایب استوکیومتری موادشرکت‌کننده در واکنش یکسان نباشد، سرعت متوسط آن‌ها نیز، متفاوت از یکدیگر خواهد بود. از این رو، شیمی‌دان‌ها برای درک آسان‌تر روند پیشرفت واکنش‌ها در واحد زمان، از یک مفهوم کاربردی به نام سرعت واکنش استفاده می‌کنند. سرعت واکنش، از تقسیم سرعت متوسط مصرف یا تولید هر یک از مواد شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن ماده بدست می‌آید. برای مثال معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$۲A + B \longrightarrow ۳C + ۲D$$

برای محاسبه سرعت متوسط واکنش در بازهٔ زمانی Δt به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\overline{R}_{\text{واکنش}} = \frac{|\Delta n_A|}{۲\times\Delta t} = \frac{|\Delta n_B|}{\Delta t} = \frac{|\Delta n_C|}{۳\times\Delta t} = \frac{|\Delta n_D|}{۲\times\Delta t} \Longrightarrow \overline{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\overline{R}_A}{۲} = \frac{\overline{R}_B}{۱} = \frac{\overline{R}_C}{۳} = \frac{\overline{R}_D}{۲}$$

پاسخ تشریحی:

معادله موازنه‌شده واکنش به صورت زیر است:

$$۴NH_۳(g) + ۵O_۲(g) \longrightarrow ۴NO(g) + ۶H_۲O(g)$$

با توجه به معادله موازنه‌شده واکنش، به ازای هر بار انجام واکنش، ۹ مول واکنش‌دهنده مصرف شده و ۱۰ مول فراورده تولید می‌شود. بنابراین می‌توان گفت به ازای هر بار انجام واکنش، ۱ مول به شمار گازهای موجود در ظرف افزوده می‌شود. بر این اساس، میزان افزایش شمار مول‌های گازی موجود در ظرف را پس از ۳۰ ثانیه محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مول گاز افزوده‌شده} = ۳۰\text{s}\times\frac{۱\ min}{۶۰\text{s}}\times\frac{۰/۰۲\ mol.L^{-۱}}{۱\ min}\times ۲L = ۰/۰۲\ mol$$

بنابراین پس از ۳۰ ثانیه، ۰/۰۲ مول به گازهای موجود در ظرف افزوده می‌شود. مقدار اولیه گازهای موجود در ظرف معادل با ۰/۴۵ مول بوده است که به ۰/۴۷ مول خواهد رسید.

با توجه به واکنش انجام‌شده، در مدت ۳۰ ثانیه، ۰/۰۸ مول از آمونیاک اولیه مصرف‌شده است. حال مدت زمانی را که ۰/۱۲ مول باقی‌مانده از آمونیاک مصرف می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$?s = ۰/۱۲\ mol\ NH_۳ \times \frac{۳۰\text{s}}{۰/۰۸\ mol\ NH_۳} = ۴۵\ s$$

پس ۴۵ ثانیه دیگر طول می‌کشد تا واکنش تکمیل شود.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۹۱ ۱

پاسخ تشریحی:

تمامی مطالب داده‌شده، درست هستند.

آ) شیمی‌دان‌ها برای درک آسان‌تر روند پیشرفت واکنش‌ها، از یک مفهوم کاربردی به نام سرعت واکنش استفاده می‌کنند.

ب) سرعت واکنش، از تقسیم سرعت متوسط مصرف یا تولید هر یک از مواد شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن ماده بدست می‌آید. در صورتی که ضریب یک ماده در معادله موازنه‌شده برابر با یک باشد، سرعت متوسط تولید یا مصرف آن ماده، با سرعت متوسط واکنش برابر است.

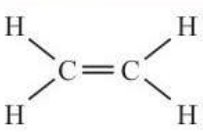
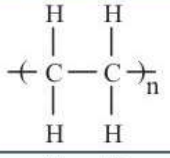
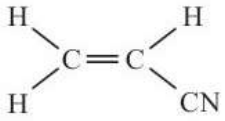
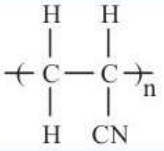
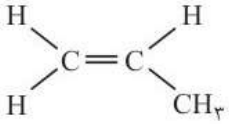
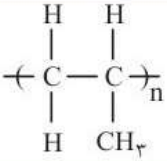
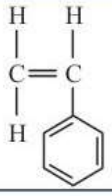
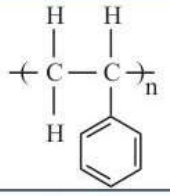
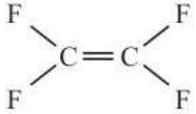
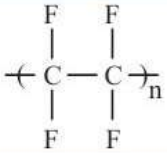
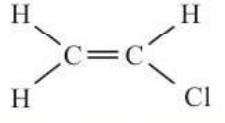
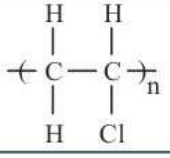
پ) شیب نمودار «مول-زمان» برای هر یک از مواد شرکت‌کننده در واکنش، متناسب با ضریب استوکیومتری آن ماده در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش است. به عبارت دیگر، اگر ضریب استوکیومتری شرکت‌کننده‌ها یکسان نباشد، سرعت متوسط آن‌ها متفاوت از یکدیگر خواهد بود.

ت) سرعت واکنش، از تقسیم سرعت متوسط مصرف یا تولید هر یک از مواد شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن ماده بدست می‌آید.

۹۲ ۳

پاسخ تشریحی:

در ساختار پلی سیانواتن بر روی اتم‌های نیتروژن، در تفلون بر روی اتم‌های فلوئور و در پلی‌وینیل کلرید بر روی اتم‌های کلر، جفت الکترون ناپیوندی قرار دارد. جدول زیر، ساختار و ویژگی‌های انواع پلیمرهای افزایشی را نشان می‌دهد:

نام پلیمر	نام مونومر	ساختار مونومر	ساختار پلیمر	کاربرد
پلی‌اتن	اتن			کیسه‌های پلاستیکی بطری‌های پلاستیکی لوله پلاستیکی
پلی‌سیانواتن	سیانواتن			پتو و پارچه
پلی‌پروپن	پروپن			تهیه و تولید سرنگ
پلی‌استیرن	استیرن			تولید ظرف یکبار مصرف
تفلون	تترافلوئورواتن			نخ دندان کفی اتو تولید ظروف نچسب
پلی‌وینیل کلرید	وینیل کلرید (کلرواتن)			کیسه‌های خون

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ پنبه یکی از الیاف طبیعی است که علاوه بر تولید پوشاک در تولید رویه مبل، پرده، تور ماهیگیری، گاز استریل و غیره استفاده می‌شود. پنبه پلیمری طبیعی بوده که مونومر سازنده آن، گلوکز است. توجه داریم که در مولکول‌های سازنده پلیمرها، شمار واحدهای سازنده، دقیقا مشابه هم نیست.

۲ درشت مولکول‌ها، موادی هستند که مولکول‌هایی با تعداد اتم زیاد داشته و در نتیجه جرم مولی بسیار زیاد و مولکول‌های بسیار بزرگی دارند. درشت‌مولکول‌ها بر اساس وجود واحد تکرارشونده در ساختار خود به دو دسته پلیمری و غیرپلیمری تقسیم‌بندی می‌شوند. توجه داریم که روغن زیتون درشت مولکول غیرپلیمری و پلی‌اتن و انسولین، درشت مولکول پلیمری به شمار می‌روند. جرم مولی روغن زیتون نسبت به پلی‌اتن و انسولین کمتر است.

۴ به عنوان مثال واحدهای گلوکز موجود در الیاف پنبه به کمک اتم اکسیژن به هم متصل شده‌اند. هر مولکول سلولز از اتصال تعداد زیادی مولکول گلوکز به وجود آمده است.

---

۹۳ ۴

پاسخ تشریحی:

زمان انجام واکنش‌ها، به عوامل مختلفی مثل دما، غلظت، نوع مواد واکنش‌دهنده، کاتالیزگر و سطح تماس واکنش‌دهنده بستگی دارد.
به گونه‌ای که برای کاهش یا افزایش سرعت انجام واکنش‌ها، می‌توان این عوامل را تغییر داد:
کاتالیزگر ماده‌ای است که بدون مصرف‌شدن در واکنش‌های شیمیایی، سرعت انجام آن‌ها را افزایش می‌دهد. یون یدید(I^-)، کاتالیزگر واکنش تجزیه آب اکسیژنه است. محلول هیدروژن پراکسید در دمای اتاق به کندی تجزیه شده و گاز اکسیژن تولید می‌کند؛ در حالی که افزودن دو قطره از محلول پتاسیم یدید به این محلول، سرعت واکنش را به طور چشمگیری افزایش می‌دهد.
با افزایش غلظت واکنش‌دهنده‌های شرکت‌کننده در یک واکنش شیمیایی، تعداد برخوردهای میان ذرات سازنده این مواد افزایش یافته و واکنش موردنظر نیز با سرعت بیشتری انجام می‌شود. الیاف آهن در هوای معمولی در مجاورت با شعلهٔ آتش، داغ و سرخ شده اما نمی‌سوزند. درحالی که همان مقدار الیاف آهن داغ و سرخ‌شده در یک ارلن پر از گاز اکسیژن، شعله‌ور شده و شروع به سوختن می‌کند.
با افزایش سطح تماس میان واکنش‌دهنده‌های شرکت‌کننده در یک فرایند نیز تعداد برخوردهای میان ذرات سازنده این مواد افزایش یافته و واکنش موردنظر با سرعت بیشتری انجام می‌شود. اگر شعلهٔ آتش را روی گرد آهن موجود در کپسول چینی بگیریم، آهن موجود در ظرف، داغ و گداخته شده اما نمی‌سوزد. در صورتی که اگر گرد آهن را بر روی شعله آتش بپاشیم، با توجه به افزایش سطح تماس آهن با اکسیژن هوا، گرد آهن می‌سوزد.
با توجه به توضیحات داده‌شده، راهکارهای گزینه چهارم به درستی بیان‌شده است.

---

۹۴ ۲

پاسخ تشریحی:

فرمول مولکولی ترکیب موردنظر به صورت $C_{16}H_{17}SO_2N_3$ است. بر این اساس، عبارت‌های الف و ت درست هستند.

بررسی موارد:

الف) در این ترکیب شمار پیوندهای $C-H$، برابر با ۱۶ بوده که معادل با شمار اتم‌های کربن در آن است.

ب) حلقه بنزنی، حلقه‌ای ۶ کربنه است که پیوندهای کربن-کربن موجود در حلقه به صورت یک در میان، دوگانه هستند. با جایگزین کردن اتم‌های نیتروژن با اتم کربن، ساختاری با دو حلقه بنزنی تشکیل خواهد شد.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

پ) ۳ و ۶- دی‌اتیل، ۴- متیل نونان آلکانی شاخه‌دار و دارای ۱۴ اتم کربن است درحالی که ساختار ترکیب موردنظر، ۱۶ اتم کربن دارد.

ت) اکسنده‌ترین عنصر ترکیب، اکسیژن است که بر روی هر اتم آن، دو جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. با این حساب شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی این عنصر در ترکیب معادل با ۴ خواهد بود. از طرفی شمار پیوندهای دوگانه در این ترکیب برابر ۸ پیوند است. بنابراین نسبت خواسته‌شده برابر با ۲ خواهد بود.

۹۵ F

پاسخ تشریحی:

در یک محلول اسیدی، هرچه غلظت یون هیدرونیوم بیشتر باشد، محلول از خاصیت اسیدی بیشتری برخوردار است. توجه داریم که با افزایش خاصیت اسیدی یک محلول، pH آن، کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) غلظت تعادلی HF نسبت به غلظت تعادلی یون هیدرونیوم و یون فلوئورید تولیدشده بیشتر است. توجه داریم که هیدروفلوئوریک اسید، یک اسید ضعیف بوده و به میزان کمی، یونش پیدا می‌کند.

۲) به کاربردن عبارت تفکیک یونی نادرست بوده و بایستی از واژه یونش استفاده شود. توجه داریم که عبارت تفکیک یونی برای ترکیب‌های یونی مانند $NaCl$ به کار می‌رود.

۳) از ثابت یونش اسیدها، به عنوان معیار مناسبی برای مقایسه قدرت اسیدهای مختلف استفاده می‌شود. در واقع هرچقدر که مقدار K_α برای یک ماده اسیدی بزرگتر باشد، آن اسید به هنگام انحلال در آب، به میزان بیشتری یونش پیدا کرده و قدرت اسیدی بالاتری دارد. توجه داریم که مقدار ثابت یونش برای اسیدهای مختلف مانند هر ثابت تعادل دیگری، فقط به دما بستگی دارد و غلظت اسید موردنظر در مقدار آن تاثیری ندارد. فرمیک اسید نسبت به استیک‌اسید، ثابت یونش بزرگتری داشته و از قدرت اسیدی بیشتری برخوردار است.

توجه داریم که ثابت یونش اسیدهای ضعیف کم‌تر از $1\,mol\cdot L^{-1}$ است. جدول زیر، ثابت یونش اسیدهای مختلف را نشان می‌دهد:

نام اسید	فرمول شیمیایی	ثابت یونش (K_a)	معادله یونش در آب
هیدرویدیک اسید	HI	بسیار بزرگ	$HI(aq) \rightarrow H^+(aq) + I^-(aq)$
هیدروبرمیک اسید	HBr	بسیار بزرگ	$HBr(aq) \rightarrow H^+(aq) + Br^-(aq)$
هیدروکلریک اسید	HCl	بسیار بزرگ	$HCl(aq) \rightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$
سولفوریک اسید	H_2SO_4	بسیار بزرگ	$H_2SO_4(aq) \rightarrow H^+(aq) + HSO_4^-(aq)$
نیتریک اسید	HNO_3	بزرگ	$HNO_3(aq) \rightarrow H^+(aq) + NO_3^-(aq)$
هیدروفلوئوریک اسید	HF	$5/9\times10^{-4}$	$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$
نیترواسید	HNO_2	$4/5\times10^{-4}$	$HNO_2(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq)$
فورمیک اسید	$HCOOH$	$1/8\times10^{-4}$	$HCOOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)$
استیک اسید	CH_3COOH	$1/8\times10^{-5}$	$CH_3COOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CH_3COO^-(aq)$
هیدروسیانیک اسید	HCN	$4/9\times10^{-10}$	$HCN(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CN^-(aq)$

در جدول بالا قدرت اسیدی و ثابت یونش اسیدهای ذکر شده از بالا به پایین کاهش می‌یابد.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۹۶ ۴

عبارت‌های الف و پ درست هستند.

بررسی موارد:

الف) معادله یونش باز DOH به صورت زیر است:

$$DOH(aq) \rightleftharpoons D^+(aq) + OH^-(aq)$$

با توجه به اینکه غلظت یون هیدروکسید تولیدشده از رابطه $M\alpha$ به‌دست می‌آید، داریم:

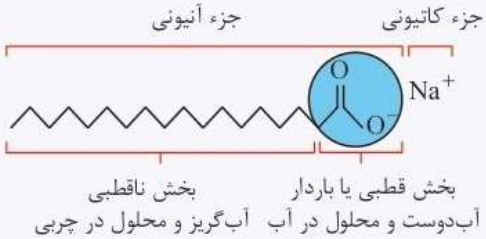
$$[OH^-] = M\alpha = ۰/۱ \times ۱۶ \times ۱۰^{-۲} = ۱۶ \times ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

در یک محلول آبی در دمای ۲۵°C، حاصل‌ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید برابر با $۱۰^{-۱۴}\ mol^۲.L^{-۲}$ است. اکنون با توجه به غلظت یون هیدروکسید، غلظت یون هیدرونیوم را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \longrightarrow [H^+] \times ۱۶ \times ۱۰^{-۳} = ۱۰^{-۱۴} \longrightarrow [H^+] = ۶/۲۵ \times ۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}$$

پ) پاک‌کننده‌های صابونی یک بخش کاتیونی و یک بخش آنیونی دارند که در صابون‌های جامد این بخش Na^+ و در صابون مایع K^+ یا $NH_۴^+$ است. بخش آنیونی صابون‌ها خود دو بخش قطبی و ناقطبی دارد که بخش قطبی آن معادل COO^- و بخش ناقطبی آن، زنجیر هیدروکربنی یا گروه R است. توجه داریم که در پاک‌کننده‌های صابونی بخش کاتیونی نقشی در پاک‌کنندگی ندارد. با افزایش شمار اتم‌های کربن در پاک‌کننده‌های غیرصابونی، بخش ناقطبی ماده بزرگتر شده و انحلال‌پذیری آن در آب کاهش می‌یابد.

صابون‌های جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب هستند و می‌توان آن‌ها را با فرمول کلی RCOONa نشان داد که در آن گروه R نشان دهندهٔ یک زنجیر هیدروکربنی بلند است. اگر R زنجیر آلکیلی باشد، فرمول کلی این صابون‌ها به‌صورت $C_{n+۱}H_{۲n+۱}O_۲Na$ خواهد بود. فرمول ساختاری این نوع از صابون‌ها به صورت زیر خواهد بود:



پ) از انحلال هر مول دی نیتروژن پنتااکسید، دو مول یون هیدرونیوم و از انحلال هر مول لیتیم اکسید، دو مول یون هیدروکسید در آب تولید می‌شود. بنابراین محلول موردنظر pH خنثی دارد.

ت) ثابت یونش فقط با تغییر دما، تغییر می‌کند و در دمای ثابت، ثابت یونش اسید تغییر نخواهد کرد.

---

۹۷ ۲

پاسخ تشریحی:

به منظور محاسبهٔ غلظت یون هیدرونیوم در اسیدهای ضعیف، می‌توانیم از رابطه $[H^+] = \sqrt{K_a \times M}$ بهره ببریم.

$$\frac{[H^+]_{HD}}{[H^+]_{HA}} = \sqrt{\frac{M_{HD} \times K_{HD}}{M_{HA} \times K_{HA}}} \longrightarrow \sqrt{\frac{۰/۰۵ \times ۱۰^{-۶}}{۰/۰۵ \times ۱}} = ۱۰^{-۳}$$

با توجه به این رابطه، غلظت یون هیدرونیوم در محلول HA، ۱۰۰۰ برابر محلول HD است. می‌دانیم که pH محلول با غلظت یون هیدرونیوم رابطه عکس دارد. بنابراین در ارتباط با مقایسه pH این دو محلول، داریم:

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

$$pH_{HD} - pH_{HA} = -log[H^+{}_{HD}] - (-log[H^+{}_{HA}]) = log[H^+{}_{HA}] - log[H^+{}_{HD}] = log\frac{[H^+{}_{HA}]}{[H^+{}_{HD}]} = log\,۱۰^۳ = ۳$$

بر این اساس، pH محلول HA به میزان سه واحد کوچکتر است.

---

۹۸ ۳

پاسخ تشریحی:

به ترد، خرد شدن و فروریختن فلزها بر اثر یک واکنش اکسایش-کاهش خوردگی گفته می‌شود. هنگامی که وسایل آهنی در هوای مرطوب قرار می‌گیرند، یک واکنش اکسایش-کاهش ناخواسته رخ می‌دهد که باعث اکسایش آهن شده و از زیبایی و استحکام آن می‌کاهد. فراورده نهایی خوردگی، زنگ آهن($Fe(OH)_۳$) است. معادله موازنه‌شده خوردگی کامل یک جسم آهنی به صورت زیر است:

$$۴Fe(s) + ۳O_۲(g) + ۶H_۲O(l) \longrightarrow ۴Fe(OH)_۳(s)$$

عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست هستند.

بررسی موارد:

۱) فرایند زنگ زدن آهن در یک سلول گالوانی انجام می‌شود. در سلول‌های گالوانی نیروی الکتروموتوری سلول بزرگتر از صفر بوده و واکنش به صورت خود به خودی انجام می‌شود.

۲) معادله نیم‌واکنش اکسایش در فرایند زنگ زدن آهن به صورت زیر است:

$$Fe(s) \longrightarrow Fe^{۲+}(aq) + ۲e^-$$

با توجه به معادله نوشته‌شده نتیجه می‌گیریم که در نیم‌واکنش اکسایش، کاتیون محلول در آب تولید می‌شود و آنیون، فراورده نیم‌واکنش کاهش است.

۳) در فرایند زنگ‌زدن آهن، گونه‌های اکسنده و کاهنده به ترتیب گاز اکسیژن و فلز آهن هستند.

۴) در این واکنش آهن اکسایش یافته و عدد اکسایش آن از صفر به ۳+ می‌رسد. پس به ازای تبدیل هر مول آهن به زنگ آهن، سه مول الکترون مبادله می‌شود.

---

۹۹ ۱

پاسخ تشریحی:

ابتدا مولاریته اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مولاریته} = \frac{\text{مول}}{\text{لیتر}} \longrightarrow [HY] = \frac{\frac{۸\,g}{۵۰\,g.mol^{-۱}}}{۰/۴\,L} = ۰/۴\,mol.L^{-۱}$$

به منظور محاسبهٔ غلظت یون هیدرونیوم، از رابطه $[H^+] = \sqrt{K_a \times M}$ بهره می‌بریم. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} \longrightarrow [H^+] = \sqrt{۱۰^{-۵} \times ۰/۴} \Longrightarrow [H^+] = ۲ \times ۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}$$

برای محاسبه pH محلول از رابطه $pH = -log[H^+]$ استفاده می‌کنیم:

$$pH = -log[H^+] = -\log(۲ \times ۱۰^{-۳}) = ۳ - log۲ = ۲/۷$$

براین اساس، pH این محلول برابر با ۲/۷ است.

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

بررسی موارد:

۱) ابتدا به کمک رابطه $[H^+] = M\alpha$ درجه یونش اولیه اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = M\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{[H^+]}{M} = \frac{۲ \times ۱۰^{-۳}}{۰/۴} = ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

حجم محلول با اضافه کردن آب، ۴ برابر شده و به ۱/۶ لیتر می‌رسد. بنابراین غلظت اسید برابر است با:

$$[\mathrm{HY}] = \frac{\frac{۸\ g}{۵۰\ g.mol^{-۱}}}{۱/۶\ L} = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

در دمای ثابت، ثابت یونش اسید تغییری نمی‌کند. بر این اساس، غلظت یون هیدرونیوم را در محلول جدید به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} \longrightarrow [H^+] = \sqrt{۱۰^{-۵} \times ۰/۱} \Longrightarrow [H^+] = ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

در نهایت، درجه یونش اسید را در این محلول محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{[H^+]}{M} = \frac{۱۰^{-۳}}{۰/۱} = ۱۰^{-۲}$$

درجه یونش اولیه اسید برابر با ۰/۰۰۵ بوده که با ۴ برابر شدن حجم محلول، دو برابر شده و به ۰/۰۱ می‌رسد.

۲) با دو برابر کردن جرم اسید حل‌شده، مقدار اسید به ۱۶ گرم می‌رسد و با نصف‌کردن حجم محلول، حجم جدید معادل ۲۰۰ میلی‌لیتر خواهد شد. بنابراین مولاریتهٔ اسید برابر است با:

$$[\mathrm{HY}] = \frac{\frac{۱۶\ g}{۵۰\ g.mol^{-۱}}}{۰/۲\ L} = ۱/۶\ mol.L^{-۱}$$

حال به کمک رابطه $[H^+] = \sqrt{K_a \times M}$ غلظت یون هیدرونیوم را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} \longrightarrow [H^+] = \sqrt{۱۰^{-۵} \times ۱/۶} \Longrightarrow [H^+] = ۴ \times ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

در نهایت pH محلول را با استفاده از رابطهٔ $pH = -log[H^+]$، محاسبه می‌کنیم:

$$pH = -log[H^+] = -\log(۴ \times ۱۰^{-۳}) = ۳ - ۲log۲ = ۲/۴$$

بنابراین با دو برابر کردن جرم اسید و نصف کردن حجم محلول، pH محلول به اندازه ۰/۳ واحد کاهش می‌یابد.

۳) همانطور که می‌دانیم در یک محلول آبی در دمای ۲۵°C، حاصل‌ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید برابر با $۱۰^{-۱۴}\ mol^۲.L^{-۲}$ است. بر این اساس، غلظت یون هیدروکسید را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow ۲ \times ۱۰^{-۳} \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow [OH^-] = ۵ \times ۱۰^{-۱۲} mol.L^{-۱}$$

طبق محاسبات انجام‌شده، غلظت یون هیدروکسید برابر با ۵×۱۰^{-۱۲} مول بر لیتر است.

۴) با توجه به محاسبات انجام‌شده، pH این محلول برابر با ۲/۷ است.

---

۱۰۰ | ۱

پاسخ تشریحی:

همهٔ موارد داده شده درست هستند. معادله موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$۲AuI_۴^- + ۳Cu \longrightarrow ۲Au + ۳Cu^{۲+} + ۸I^-$$

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

بررسی موارد:

۱) با توجه به مثبت بودن نیروی الکتروموتوری سلول، واکنش به صورت خود به خود انجام می‌شود.

۲) در این واکنش عدد اکسایش مس از صفر به ۲+ می‌رسد. بنابراین به ازای مصرف هر مول مس در این واکنش، دو مول الکترون مبادله می‌شود. ضریب مس در معادله موازنه‌شده برابر با ۳ است. بر این اساس داریم:

$$?\,mol\,e^- = ۳\,mol\,Cu \times \frac{۲\,mol\,e^-}{۱\,mol\,Cu} = ۶\,mol\,e^-$$

بنابراین در این واکنش، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.

۳) در این واکنش، عدد اکسایش اتم Au در $AuI_۴^-$ برابر با ۳ است که با انجام واکنش، عدد اکسایش آن به اندازهٔ ۳ واحد کاهش می‌یابد. از این رو، می‌توان گفت که $AuI_۴^-$ که یک یون چند اتمی است، نقش اکسنده را دارد.

۴) با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، مجموع ضرایب استوکیومتری در این واکنش برابر با ۱۸ است.

---

۱۰۱ F

به انرژی لازم در فشار ثابت برای فروپاشی شبکهٔ بلوری یک مول جامد یونی و تبدیل آن به یون‌های گازی(بر حسب کیلوژول بر مول)، آنتالپی فروپاشی شبکه می‌گویند و آن را با نماد $\Delta H_{\text{فروپاشی}}$ نشان می‌دهند. هر چه چگالی بار یون‌های سازندهٔ ترکیب یونی بیشتر باشد، نیروی جاذبهٔ میان یون‌ها قوی‌تر بوده و استحکام و پایداری شبکه بیشتر است. در نتیجه برای فروپاشی شبکه به انرژی بیشتری نیاز است. به کمک روش زیر، می‌توان آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب‌های یونی را با هم مقایسه کرد.

گام اول: هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ آن ترکیب بزرگ‌تر است. به عنوان مثال، دو ترکیب $MgCl_۲$ و MgO را در نظر بگیرید. کاتیون دو ترکیب یکسان است اما از آنجا که قدرمطلق بار $O^{۲-}$ نسبت به Cl^- بیشتر است، بنابراین آنتالپی فروپاشی منیزیم اکسید نسبت به منیزیم کلرید بیشتر است.

گام دوم: اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، شعاع یون‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. هر چه شعاع یون‌ها کوچکتر باشد، آنتالپی فروپاشی شبکه بزرگتر است. به عنوان مثال دو ترکیب $Na_۳N$ و $Na_۳P$ را درنظر بگیرید. کاتیون دو ترکیب و بار آنیون‌ها یکسان است، از آنجا که شعاع یون $N^{۳-}$ کوچکتر از یون $P^{۳-}$ است، آنتالپی فروپاشی سدیم نیترید نسبت به سدیم فسفید بیشتر خواهد بود.

بر اساس توضیحات داده‌شده، با توجه به اینکه آنتالپی فروپاشی ترکیب d نسبت به ترکیب b بیشتر بوده و بار الکتریکی آن‌ها برابر است و همچنین می‌دانیم که شعاع آنیون در ترکیب d نسبت به ترکیب b بیشتر است، بایستی کاتیون ترکیب d نسبت به کاتیون ترکیب b از چگالی بار بیشتری برخوردار باشد از آنجا که چگالی بار با شعاع یون رابطه عکس دارد، شعاع کاتیون در ترکیب b نسبت به شعاع کاتیون در ترکیب d بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) می‌دانیم که چگالی بار با میزان بار آنیون‌ها و کاتیون‌های سازنده یک ترکیب رابطه مستقیم دارد. در صورتی که کاتیون ترکیب C بار ۲+ داشته باشد، ترکیب a می‌تواند یک ترکیب یونی متشکل از کاتیون با بار ۱+ و آنیون هالید باشد.

۲) همانطور که می‌دانیم، نافلزات موجود در یک دوره، آنیونی با بار متفاوت تشکیل می‌دهند. با توجه به مشابه بودن کاتیون دو ترکیب a و b، در صورتی که این دو ترکیب متشکل از آنیون‌های یک دوره باشند، بار الکتریکی این دو ترکیب با یکدیگر متفاوت خواهد بود و از این‌رو آنتالپی فروپاشی آن‌ها، تفاوت زیادی خواهد داشت در حالی که در نمودار رسم‌شده، تفاوت آنتالپی فروپاشی ترکیب a و b کم است.

۳) الزاما بار کاتیون و آنیون در ترکیب e نسبت به سایر ترکیبات بیشتر نیست. ممکن است شعاع کاتیون‌ها و آنیون‌های سازنده آن نسبت به سایر ترکیبات کمتر باشد.

---

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۱۰۲ ۲

پاسخ تشریحی:

معادله واکنش تعادلی به صورت زیر است:

$$۲NO(g) + Br_۲(g) \longrightarrow ۲NOBr(g)$$

به منظور محاسبهٔ ثابت تعادل واکنش $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$ می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$K = \frac{(n_C)^c \times (n_D)^d}{(n_A)^a \times (n_B)^b} \times \left(\frac{۱}{V}\right)^{\Delta n} \quad \text{و} \quad \Delta n = (c + d) - (a + b)$$

دقت کنید که در محاسبهٔ Δn صرفا ضرایب مواد گازی و مواد در حالت محلول را در نظر بگیرید. در این حالت، اگر مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌های گازی یا محلول با مجموع ضرایب فراورده‌های گازی یا محلول برابر باشد، Δn برابر با صفر شده و مقدار ثابت تعادل مستقل از حجم ظرف می‌شود. در این حالت، رابطهٔ ثابت تعادل به صورت زیر خواهد بود:

$$K = \frac{(n_C)^c \times (n_D)^d}{(n_A)^a \times (n_B)^b}$$

در حالت تعادل، ۰/۶ مول $NOBr$، ۰/۶ مول NO و ۰/۱۵ مول $Br_۲$ در ظرف وجود دارد. با توجه به رابطه گفته‌شده، داریم:

$$K = \frac{(n_{NOBr})^۲}{(n_{NO})^۲ \times (n_{Br_۲})} \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱} = \frac{(۰/۶)^۲}{(۰/۶)^۲ \times (۰/۱۵)} \times ۳ = ۲۰$$

حال به حل قسمت دوم سوال می‌پردازیم. چون ۶۰ درصد از مقدار آغازی $Br_۲$ مصرف شده است، مقدار برم موجود در محلول ۴۰ درصد مقدار اولیه است. بر این اساس داریم:

$$?\,mol\,Br_۲ = ۰/۱۵ \times \frac{۱۰۰}{۴۰} = ۰/۳۷۵\,mol$$

بنابراین مقدار مول اولیه برم معادل با ۰/۳۷۵ مول بوده است.

---

۱۰۳ ۳

پاسخ تشریحی:

انرژی فعال‌سازی واکنش فسفر با گاز اکسیژن، بسیار کوچکتر از انرژی فعال‌سازی واکنش بین گازهای هیدروژن و اکسیژن است. در نتیجه فسفر سفید برخلاف گاز هیدروژن در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) یکی از رایج‌ترین روش‌های طیف‌سنجی که برای شناسایی گروه‌های عاملی به کار می‌رود، طیف‌سنجی فروسرخ نام دارد. با توجه به اینکه شمار و نوع اتم‌های سازنده هر گروه عاملی متفاوت از دیگری است، هر یک از آنها تنها گستره معین و منحصر به فردی از پرتوهای فروسرخ را جذب می‌کند. همین تفاوت، اساس شناسایی گروه‌های عاملی از یکدیگر است. دقت داریم که طول موج $۱۰^۳$ تا $۱۰^۵$ نانومتر در محدوده فروسرخ جای می‌گیرد.

۲) گاز نیتروژن واکنش‌پذیری کمی دارد و با گازهای هیدروژن و اکسیژن در دمای اتاق واکنش نمی‌دهد.

۴) هرگاه یک نمونه ماده در برابر پرتوهای الکترومغناطیسی قرار بگیرد، ممکن است گستره معینی از آن‌ها را جذب و پرتوهای باقی‌مانده را بازتاب یا عبور دهد. طیف حاصل برهم‌کنش ماده و پرتوهای الکترومغناطیسی است.

---

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۱۰۴ | ۲

بر اساس قانون لوشاتلیه، اگر تغییری موجب بر هم زدن تعادل در یک سامانه تعادلی شود، تعادل در جهتی جابه‌جا می‌شود که تا حد امکان، اثر آن تغییر را جبران کند. بر اساس این اصل، در صورت افزایش غلظت یکی از گونه‌های شرکت‌کننده در یک تعادل شیمیایی، تعادل در جهتی پیش می‌رود که تا حدامکان مقداری از آن ماده را مصرف کند و سامانه مجددا به حالت تعادل برسد. در نقطه مقابل، در صورت کاهش غلظت یکی از گونه‌های شرکت‌کننده در یک تعادل شیمیایی، تعادل در جهتی پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن ماده را تولید کند و سامانه مجددا به حالت تعادل برسد. توجه داریم که در این جابه‌جایی مقدار K (ثابت یونش) تغییری نمی‌کند.

از تغییر حجم سامانه واکنش می‌توان برای تغییر غلظت مواد گازی شرکت‌کننده در واکنش کمک گرفت. برای آن‌که تغییر حجم بر جابه‌جایی تعادل یک واکنش شیمیایی موثر باشد، باید حداقل یکی از اجزای شرکت‌کننده در واکنش گازی شکل باشد و تعداد مول‌های گازی در دو طرف معادله واکنش نیز برابر نباشند.

یکی از راه‌های تغییر حجم سامانه‌های گازی، تغییر فشار است. درواقع با افزایش فشار اعمال‌شده بر یک تعادل گازی، حجم اشغال‌شده توسط گازها کاهش پیدا می‌کند و با کاهش فشار اعمال‌شده بر یک تعادل گازی نیز حجم اشغال‌شده توسط گازها افزایش پیدا می‌کند.

تغییر دمای سامانه‌های تعادلی، یکی از روش‌های مورداستفاده برای جابه‌جا کردن تعادل‌های شیمیایی است. تغییر دما افزون بر جابه‌جا کردن تعادل، مقدار ثابت تعادل واکنش را نیز تغییر می‌دهد. اثر تغییر دما بر تعادل‌های گوناگون یکسان نیست و به گرماده یا گرماگیر بودن آن واکنش‌ها بستگی دارد. با افزایش دمای یک سامانه در حالت تعادل، واکنش در جهت مصرف گرما پیش می‌رود تا دمای سامانه را مجددا کاهش دهد. اگر این واکنش گرماگیر باشد، تعادل در جهت رفت جابه‌جا شده و مقدار فراورده‌ها افزایش پیدا می‌کند. در نقطه مقابل، اگر این واکنش گرماده باشد، با افزایش دما، تعادل در جهت برگشت پیش رفته و مقدار واکنش‌دهنده‌ها افزایش پیدا می‌کند. با کاهش دمای یک سامانه در حالت تعادل، واکنش در جهت تولید گرما پیش می‌رود تا دمای سامانه را دوباره افزایش دهد. اگر این واکنش گرماگیر باشد، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا شده و مقدار واکنش‌دهنده‌ها افزایش پیدا می‌کند. در صورتی که این واکنش گرماده باشد، با کاهش دما تعادل در جهت رفت پیش می‌رود و مقدار فراورده‌ها افزایش پیدا می‌کند.

پاسخ تشریحی:

بر اساس توضیحات داده‌شده، موارد اول، دوم، سوم و پنجم باعث جابه‌جا شدن تعادل در جهت رفت و پیش بردن واکنش در جهت تولید فراورده بیشتر خواهند شد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

مورد اول) با افزایش فشار اعمال‌شده بر یک تعادل گازی، حجم اشغال‌شده توسط گازها کاهش پیدا می‌کند و در این صورت، غلظت افزایش پیدا می‌کند. با افزایش غلظت، واکنش به سمت تولید مول کمتر پیش می‌رود. در سمت واکنش‌دهنده‌ها، ۳ مول و در سمت فراورده‌ها، ۱ مول ماده وجود دارد. بنابراین تعادل به سمت رفت جابه‌جا می‌شود.

مورد دوم) با خارج کردن ٪۵۰ متانول، غلظت آن کاهش یافته و طبق اصل لوشاتلیه، واکنش به سمت تولید آن پیش خواهد رفت. از این رو، واکنش در جهت رفت جابه‌جا خواهد شد.

مورد سوم) با کاهش دما، واکنش در جهتی پیش می‌رود که گرما تولید کند. توجه به گرماده بودن واکنش موردنظر، با کاهش دما، تعادل در جهت رفت پیش می‌رود و مقدار فراورده‌ها افزایش پیدا می‌کند.

مورد چهارم) با خارج کردن ٪۵۰ مواد واکنش‌دهنده از واکنش، تعادل در جهتی پیش می‌رود که کاهش این مواد را جبران کند. بنابراین واکنش در جهت برگشت پیش خواهد رفت.

مورد پنجم) با تزریق گاز کربن مونوکسید به واکنش، غلظت آن افزایش می‌یابد. طبق اصل لوشاتلیه، واکنش در جهتی پیش می‌رود که اثر افزایش غلظت آن را جبران کند. بر این اساس، واکنش در جهت رفت پیش می‌رود.

---

۱۰۵ | ۱

پاسخ تشریحی:

از میان آنیون‌های یک دوره، با افزایش بار یون‌ها، شعاع آن‌ها افزایش می‌یابد. به عنوان مثال، مقایسهٔ شعاع آنیون‌های موجود در تناوب سوم به صورت $_{15}P^{3-} > {}_{16}S^{2-} > {}_{17}Cl^{-}$ است. با توجه به نماد این یون‌ها، پی می‌بریم که شمار الکترون‌های موجود در آن‌ها با هم برابر است در حالی که تعداد پروتون‌های موجود در هستهٔ این یون‌ها با هم متفاوت است. در هر یونی که شمار پروتون‌های موجود در هسته بیشتر باشد، این پروتون‌ها الکترون‌های

www.biomaze.ir

t.me/Azmoonha_Azmayeshi

اطراف خود را با قدرت بیشتری جذب می‌کنند و شعاع آن یون کوچکتر خواهد بود. به عبارت دیگر، با افزایش عدد اتمی در آنیون‌هایی که تعداد الکترون‌های برابری دارند، نیروی جاذبهٔ هسته افزایش یافته و شعاع یونی کاهش پیدا می‌کند. از میان کاتیون‌های یک دوره، با افزایش بار یون‌ها، شعاع آن‌ها کاهش می‌یابد. به عنوان مثال مقایسهٔ شعاع کاتیون‌های موجود در تناوب سوم به صورت $_{11}Na^+ > {}_{12}Mg^{2+} > {}_{13}Al^{3+}$ است. مجددا با دقت در نماد این یون‌ها پی می‌بریم که شمار الکترون‌های موجود در آن‌ها با هم برابر است در حالی که تعداد پروتون‌های موجود در هستهٔ آن‌ها با هم متفاوت است.همان‌طور که گفته شد، در هر یونی که شمار پروتون‌های هسته بیشتر باشد، این پروتون‌ها الکترون‌های اطراف خود را با قدرت بیشتری جذب کرده و شعاع آن یون کوچکتر می‌شود. پس با افزایش عدد اتمی در کاتیون‌هایی که تعداد الکترون‌های برابری دارند، نیروی جاذبه هسته بیشتر شده و شعاع یونی کاهش پیدا می‌کند.

با توجه به توضیحات داده‌شده، در گونه‌های هم‌الکترون هر چقدر بار منفی بیشتر باشد، شعاع بزرگتر و هر چقدر بار مثبت بیشتر باشد، شعاع کوچکتر است. بر این اساس، مقایسه شعاع یون‌های داده‌شده به صورت زیر است:

مقایسه شعاع یونی : $S^{2-} > Cl^- > K^+ > Ca^{2+}$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) عنصر سدیم و منیزیم در دوره سوم جدول تناوبی قرار گرفته‌اند. بنابراین در میان کاتیون‌های Na^+ و Mg^{2+}، کاتیون Na^+ به علت بار مثبت کمتر، شعاع یونی بیشتری نسبت به Mg^{2+} دارد. با توجه به بیشتر بودن شعاع K^+ نسبت به Na^+، می‌توان گفت که شعاع K^+ نیز از Mg^{2+} بیشتر است.

۳) در میان آنیون‌های یک دوره، آنیونی که دارای بار منفی بیشتری است، شعاع یونی بیشتری دارد. بر این اساس در میان S^{2-} و Cl^-، شعاع یونی S^{2-} بیشتر است. از طرفی می‌دانیم که در میان کاتیون‌های یک دوره، کاتیون با بار مثبت بیشتر شعاع یونی کمتری دارد. بنابراین مقایسه شعاع کاتیون‌های منیزیم و آلومینیوم به صورت $Mg^{2+} > Al^{3+}$ است.

۴) در گونه‌های هم‌الکترون هر چقدر بار منفی بیشتر باشد، شعاع بزرگتر و هر چقدر بار مثبت بیشتر باشد، شعاع کوچکتر است. بر این اساس، شعاع یونی O^{2-} نسبت به F^- و شعاع یونی F^- نسبت به Mg^{2+} بیشتر است.

www.biomaze.ir

کنکور پرمیوم
KONKOORPREMIUM